अनुक्रमांक : ______________ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : ________________

131 **324(FA)**

2024
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) अशून्य परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^* पर एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है : $a\,R\,b$ यदि $a = \frac{1}{b}$ । तब Q^* पर यह सम्बन्ध R : **1**

(i) स्वतुल्य है, किन्तु सममित और संक्रामक नहीं है

(ii) सममित है, किन्तु स्वतुल्य और संक्रामक नहीं है

(iii) संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य और सममित नहीं है

(iv) स्वतुल्य और संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं है

(ख) मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है, तब f है : **1**

(i) एकैकी

(ii) आच्छादक

(iii) एकैकी नहीं

(iv) इनमें से कोई नहीं

(ग) यदि $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$, तो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है : **1**

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{4}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

(iv) $\frac{5\pi}{12}$

(घ) $\int \sin^2 x \, dx$ का मान है : **1**

(i) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

(iii) $\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4}$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$

(ङ) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8y = \log_e x$ की कोटि है : **1**

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) यदि $e^y(x + 1) = 1$, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. **1**

(ग) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$. **1**

(घ) x के सापेक्ष $\frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$ का समाकलन कीजिए। **1**

(ङ) दी गयी घटनायें A और B ऐसी हैं कि $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$; तब $P($A-नहीं और B-नहीं$)$ को ज्ञात कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) x तथा y ज्ञात कीजिए यदि $2\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 6\\1 & 8\end{bmatrix}$. **2**

(ख) यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1+\cos\theta)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) $\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 7)$, $(-4, 3, -6)$ और $(2, 9, 2)$ हों, तो रेखाओं AB और CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $(1, 2)$ तथा $(2, 1)$ के अन्तर्विष्ट करने वाले तुल्यता सम्बन्धों की संख्या 2 है। **2**

(ख) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f (i) वर्धमान है, (ii) ह्रासमान है। **2**

(ग) अवकल समीकरण $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ को हल कीजिए। **2**

(घ) एक पासे को दो बार उछाला गया। मान लें A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और घटना B 'द्वितीय उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' दर्शाते हैं। घटनाओं A और B के स्वातन्त्र्य का परीक्षण कीजिए। **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$. **5**

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|, x = 0$ पर संतत है लेकिन अवकलनीय नहीं है। **5**

(ग) यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. **5**

(घ) रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x \ (x \neq 0)$. **5**

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए : $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ तथा $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$. **5**

(ख) एक थैला में 10 काली और 5 सफेद गेंदें हैं। दो गेंद, एक के बाद एक, निकाली जाती हैं और पहली गेंद दूसरे के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती है। मान लीजिए कि थैला में से प्रत्येक गेंद का निकालना समसंभाव्य है, तो दोनों काले गेंद निकालने की क्या प्रायिकता है ? **5**

(ग) व्यवरोधों $4x + y \geq 80, x + 5y \geq 115, 3x + 2y \leq 150, x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत $z = 5x + 3y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए। **5**

(घ) दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। **5**

(ङ) अवकल समीकरण $(x + y)dy + (x - y)dx = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, यदि $y = 1$ जब $x = 1$. **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) समीकरण निकाय $2x+3y+3z = 5$, $x-2y+z = -4$, $3x-y-2z = 3$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। **8**

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$, तो adj A और A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। **8**

(ख) सिद्ध कीजिए : $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$. **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) $\int \frac{\sec^2 2x}{(\cot x - \tan x)^2} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) (i) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$, तो दिखाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$. **8**

Note / Instructions:

(i) First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

(ii) There are in all nine questions in this question paper.

(iii) All questions are compulsory.

(iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(v) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vii) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. Attempt all the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book :

(a) A relation R is defined on the set Q^* of non-zero rational numbers as follows : $a\,R\,b$ if $a = \frac{1}{b}$. Then on Q^* this relation R is : **1**

(i) reflexive, but not symmetric and transitive

(ii) symmetric, but not reflexive and transitive

(iii) transitive, but not reflexive and symmetric

(iv) reflexive and transitive, but not symmetric

(b) Suppose that $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ and $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ be a function from A to B then f is : **1**

(i) one-one

(ii) onto

(iii) not one-one

(iv) none of these

(c) If $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$, then the angle between the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is : **1**

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{4}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

(iv) $\frac{5\pi}{12}$

(d) The value of $\int \sin^2 x \, dx$ is : **1**

(i) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

(iii) $\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4}$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$

(e) The order of the differential equation $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8y = \log_e x$ is : **1**

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. Do all the parts of the following :

(a) Find the principal value of $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **1**

(b) If $e^y(x+1) = 1$, show that $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. **1**

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$. **1**

(d) Integrate $\frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$ with respect to x. **1**

(e) The given events A and B are such that $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$; then find $P($A-not and B-not$)$. **1**

3. Do all the parts of the following :

(a) Find x and y if $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}$. **2**

(b) If $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$, find $\frac{dy}{dx}$. **2**

(c) Find the value of $\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$. **2**

(d) If the coordinates of the points A, B, C and D are $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 7)$, $(-4, 3, -6)$ and $(2, 9, 2)$ respectively, then find the angle between the lines AB and CD. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) Prove that the number of equivalence relations in the set $\{1, 2, 3\}$ including $(1, 2)$ and $(2, 1)$ is 2. **2**

(b) Find the intervals in which the function f given by $f(x) = x^2 - 4x + 6$ is (i) increasing, (ii) decreasing. **2**

(c) Solve the differential equation $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$. **2**

(d) A die was thrown twice. Let us represent the event 'obtaining an odd number on the first throw' by A and the event 'obtaining an odd number on the second throw' by B. Test the independency of the events A and B. **2**

5. Do all parts of the following :

(a) Prove that $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2\\ a^2 + ab & b^2 & ac\\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$. **5**

(b) Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$ but not differentiable. **5**

(c) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ is for $-1 < x < 1$ then prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. **5**

(d) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ and $\vec{r} = (2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$. **5**

(e) Solve : $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \ (x \neq 0)$. **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) Find the angle between the lines $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ and $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$. **5**

(b) There are 10 black and 5 white balls in a bag. Two balls are taken out, one after one, and the first ball is not placed back before the second is taken out. Assume that the taking out of each ball from the bag is equally likely. What is the probability that both the balls taken out are black ? **5**

(c) Minimize $Z = 5x + 3y$ subject to the constraints $4x + y \geq 80$, $x + 5y \geq 115$, $3x + 2y \leq 150$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **5**

(d) Show that the vectors $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ and $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ are the vertices of a right-angled triangle. **5**

(e) Find the particular solution of the differential equation $(x+y)dy + (x-y)dx = 0$, if $y = 1$ when $x = 1$. **5**

7. Do any one part of the following :

(a) Solve by matrix method the system of equations :

$2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$. **8**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$, find adj A and A^{-1}. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) Prove that the height of the cylinder of maximum volume inscribed in a sphere of radius R is $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **8**

(b) Prove : $\int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) Find the value of $\int \frac{\sec^2 2x}{(\cot x - \tan x)^2}\, dx$. **8**

(b) (i) Find the area of the region enclosed by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(ii) If $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$, then show that $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$. **8**