अनुक्रमांक .... मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम ....

131 **324(CX)**

2026
गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : *First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.*

निर्देश :

i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) *There are in all nine questions in this question paper.*

ii) *All questions are compulsory.*

iii) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

iv) *Marks allotted to the questions are indicated against them.*

v) *Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.*

vi) *Do not waste your time over a question which you cannot solve.*

UPBoardHub

1. **निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :**

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का हल है

A) $e^{-y} = e^x + c$ B) $e^x + e^{-y} = c$

C) $e^{-x} - e^{-y} = c$ D) $e^{-x} + e^{-y} = c$ 1

ख) $\sin(\tan^{-1} x), |x| < 1$ बराबर है

A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ B) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 1

ग) अन्तराल जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है, है

A) $(2, 10)$ B) $(2, \infty)$

C) $(-2, \infty)$ D) $(0, \infty)$ 1

घ) फलन $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ है

A) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं B) एकैकी एवं आच्छादक

C) बहुएक एवं आच्छादक D) बहुएक लेकिन आच्छादक नहीं 1

ङ) यदि $3P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ एवं $P(A|B) = \frac{2}{5}$, तब $P(A \cup B)$ होगा

A) $\frac{20}{39}$ B) $\frac{16}{39}$ C) $\frac{11}{39}$ D) $\frac{14}{39}$ 1

1. **Do all the parts of the following :**

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book :

a) The solution of $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ is

A) $e^{-y} = e^{x} + c$ B) $e^{x} + e^{-y} = c$

C) $e^{-x} - e^{-y} = c$ D) $e^{-x} + e^{-y} = c$ 1

b) $\sin(\tan^{-1} x)$, $|x| < 1$ is equal to

A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ B) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 1

c) Interval in which the given function $f(x) = x^2 - 4x + 6$ is increasing, is

A) $(2, 10)$ B) $(2, \infty)$

C) $(-2, \infty)$ D) $(0, \infty)$ 1

d) The function $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ is

A) one-one but not onto B) one-one and onto

C) many-one and onto D) many-one but not onto 1

e) If $3P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A/B) = \frac{2}{5}$, then $P(A \cup B)$ will be

A) $\frac{20}{39}$ B) $\frac{16}{39}$ C) $\frac{11}{39}$ D) $\frac{14}{39}$ 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ तथा $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित हैं तो gof ज्ञात कीजिए। 1

ख) यदि एक रेखा x, y तथा z-अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः $90°, 60°$ तथा $30°$ का कोण बनाती है तो दिक्-कोसाइन (कोज्या) ज्ञात कीजिए। 1

ग) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

घ) समाकलन $\int x^2 \tan(x^3 + 2)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

UPBoardHub

ङ) यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 12$, तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए। 1

2. Do all the parts of the following :

a) If the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$ respectively, find gof. 1

b) If a line makes $90°, 60°$ and $30°$ with x, y and z-axes in the positive direction respectively, then find direction cosines. 1

c) Find the value of $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$. 1

d) Find the value of the integral $\int x^2 \tan(x^3 + 2)\, dx$. 1

e) If for a unit vector $\vec{a}$, $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 12$, then find $|\vec{x}|$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए। 2

ख) सिद्ध कीजिए कि $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी है। 2

ग) सारणिक $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) यदि $P(A) = \dfrac{7}{13}$, $P(B) = \dfrac{9}{13}$ तथा $P(A \cap B) = \dfrac{4}{13}$, तो $P(A \cup B)$ तथा $P(A/B)$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all the parts of the following :

UPBoardHub

a) If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$, then find $|\vec{a} \times \vec{b}|$. 2

b) Prove that $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ defined by $f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$ is one-one. 2

c) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. 2

d) If $P(A) = \dfrac{7}{13}$, $P(B) = \dfrac{9}{13}$ and $P(A \cap B) = \dfrac{4}{13}$, then find the value of $P(A \cup B)$ and $P(A/B)$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) बिन्दु $(1, 2, 3)$ से जाने वाली तथा रेखा $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

ख) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x-1|, \quad x \in \mathbb{R}, x = 1$ पर अवकलित नहीं है। 2

ग) यदि $y = \sin^{-1} x$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$। 2

घ) अवकल समीकरण $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए। 2

4. **Do all the parts of the following :**

a) Find the equation of a line passing through point $(1, 2, 3)$ and parallel to the line $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$. 2

b) Prove that $f(x) = |x-1|, \quad x \in \mathbb{R}$ is not differentiable at $x = 1$. 2

UPBoardHub

c) If $y = \sin^{-1} x$, then prove that $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$. 2

d) Solve the differential equation $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$. 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) मान लीजिए $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ और इनमें से प्रत्येक अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् है, तो $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ज्ञात कीजिए। 5

ख) आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = 5x+10y$ का अधिकतम मान निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत ज्ञात कीजिए :

$$x + 2y \leq 120, \quad x + y \geq 60, \quad x - 2y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

5

ग) λ के किस मान के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \leq 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर संतत है ? 5

घ) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ हैं, तो रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि AB और CD संरेख हैं। 5

ङ) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनपर $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$ से प्रदत्त फलन $f(x)$ निरन्तर वर्धमान एवं ह्रासमान है। 5

5. **Do all parts of the following :**

UPBoardHub

a) Suppose that $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are three vectors so that $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$, and each of them is perpendicular to the sum of other two vectors, then find $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$. 5

b) Find the maximum value of the objective function $Z = 5x+10y$ by graphical method under the following constraints :

$$x + 2y \leq 120, \quad x + y \geq 60, \quad x - 2y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

5

c) For what value of λ, the function defined by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{if } x \leq 0 \\ 4x + 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$? 5

d) If the position vectors of points A, B, C and D are respectively $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$, then find the angle between the line AB and CD. Prove that AB and CD are collinear. 5

e) Find the interval at which the function $f(x)$ given by $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$ is strictly increasing and decreasing. 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइए कि $A^3 - 23A - 40I = 0$। 5

ख) सिद्ध कीजिए कि यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $\{1 - P(A')P(B')\}$ होगी। 5

ग) सिद्ध कीजिए कि एक r त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $\dfrac{4r}{3}$ है। 5

UPBoardHub

घ) $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

ङ) $\int_{-1}^{3/2} |x \sin \pi x| \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

6. **Do all the parts of the following :**

a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, then show that $A^3 - 23A - 40I = 0$. 5

b) Prove that if A and B are independent events, then the probability of happening of at least one of them in A or B is $[1 - P(A')P(B')]$. 5

c) Prove that the height of a right circular cone with maximum volume inscribed in a sphere of radius r is $\frac{4r}{3}$. 5

d) Find the area of region surrounded by $x = 0$ and $x = 2\pi$ and curve $y = \sin x$. 5

e) Find the value of $\int_{-1}^{3/2} |x \sin \pi x| \, dx$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है। एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = 0$ हो। 8

ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

UPBoardHub

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$
$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

8

7. Do any one part of the following :

a) Suppose that $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. Find the matrix D so that $CD - AB = 0$. 8

b) Solve the following system of equations by matrix method :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$
$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$
$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सत्यापित कीजिए कि फलन $y = Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x$, जहाँ A, B स्वेच्छ अचर हैं, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ का हल है। 8

ख) $\int \left[\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right] dx$ ज्ञात कीजिए। 8

8. Do any one part of the following :

a) Prove that the function $y = Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x$, is the solution of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$, where A and B are arbitrary constants. 8

b) Find $\int \left[\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right] dx$. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x, \quad (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$ । 8

ख) निम्नलिखित को हल कीजिए :

i) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ 4

ii) $\int e^x \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\right) dx$ 4

9. Do any one part of the following :

a) Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x, \quad (x \neq 0)$ given that $y = 0$ at $x = \frac{\pi}{2}$. 8

b) Solve the following :

i) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ 4

ii) $\int e^x \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\right) dx$ 4