

अनुक्रमांक : _____

नाम : _____

131

324(IY)

2025
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

- (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारंभ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- (vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

General Instructions:

- (i) There are in all nine questions in this question paper.
- (ii) All questions are compulsory.
- (iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(क) यदि $f : R \rightarrow R$, $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ द्वारा प्रदत्त है, तो $f \circ f(x)$ बराबर है : 1

- (A) $x^{\frac{1}{3}}$
- (B) x^3
- (C) x
- (D) $(3 - x^3)$

(ख) समुच्चय N में सम्बन्ध R निम्नवत् परिभाषित है :

$$R = \{(x, y) : x = y - 3, y > 3\}$$

तब निम्नलिखित में से कौन सही है ? 1

- (A) $(2, 4) \in R$
- (B) $(5, 8) \in R$
- (C) $(3, 7) \in R$
- (D) $(1, 5) \in R$

(ग) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान होगा : 1

- (A) $\frac{\pi}{3}$
- (B) $\frac{2\pi}{3}$
- (C) $\frac{\pi}{6}$
- (D) $\frac{\pi}{12}$

(घ) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y \cos x = 0$ की कोटि है : 1

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 0
- (D) परिभाषित नहीं है।

(ड) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान है :

1

(A) π

(B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

1. Do all the parts:

Select the correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) If $f : R \rightarrow R$ is given by $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, then $f \circ f(x)$ is equal to : 1

(A) $x^{\frac{1}{3}}$

(B) x^3

(C) x

(D) $(3 - x^3)$

(b) A relation R is defined in the set N as follows :

$$R = \{(x, y) : x = y - 3, y > 3\}$$

Then which of the following is correct ? 1

(A) $(2, 4) \in R$

(B) $(5, 8) \in R$

(C) $(3, 7) \in R$

(D) $(1, 5) \in R$

(c) The value of $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$, will be : 1

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{12}$

(d) The order of differential equation $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y \cos x = 0$ is : **1**

(A) 2

(B) 3

(C) 0

(D) Not defined

(e) The value of $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is : **1**

(A) π

(B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) क्या फलन $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{if } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ $x = 1$ पर संतत है ? **1**

(ग) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y \cdot \sin x = 0$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) दो बिन्दुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्या ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) यदि $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ तो $P(A/B)$ का मान ज्ञात कीजिए यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं। **1**

2. Do all the parts :

(a) Find the principal value of $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$. **1**

(b) Does the function $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{if } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ continuous at $x = 1$? **1**

(c) Find the order and degree of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y \cdot \sin x = 0$. 1

(d) Find the direction cosines of a line joining two points $(-2, 4, -5)$ and $(1, 2, 3)$. 1

(e) If $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, then find $P(A/B)$ if A and B are independent events. 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ख) यदि $y = x^{x^{\dots \text{ad inf}}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y \log x}$. 2

(ग) रेखा-युग्मों $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ तथा $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। 2

(घ) कोटि n के दो व्युत्क्रमणीय आव्यूहों A और B के लिये सिद्ध कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 2

3. Do all the parts :

(a) If $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then find the value of α . 2

(b) If $y = x^{x^{\dots \text{ad inf}}}$, then prove that $x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y \log x}$. 2

(c) Find the angle between pair of lines $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ and $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$. 2

(d) For two invertible matrices A and B of order n , prove that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दिखाइए कि प्रदत्त फलन $f(x) = \cos x$, अंतराल $(\pi, 2\pi)$ में वर्धमान है। 2

(ख) यदि $[a_{ij}] = 2i - j$ है, तो 2×3 क्रम का एक आव्यूह A ज्ञात कीजिए। 2

(ग) उस समान्तर-चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं। 2

(घ) एक घन का आयतन $9 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 10 cm है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ? 2

4. Do all the parts :

(a) Show that the given function $f(x) = \cos x$ is increasing in $(\pi, 2\pi)$. 2

(b) If $[a_{ij}] = 2i - j$, then determine a matrix A of order 2×3 . 2

(c) Find the area of a parallelogram whose adjacent sides are given by vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. 2

(d) Volume of a cube is increasing at the rate of $9 \text{ cm}^3/\text{s}$. If length of its edge is 10 cm , then its surface area is increasing with which rate ? 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y) : y \text{ भाज्य है } x \text{ से}\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध क्या तुल्यता सम्बन्ध है ? 5

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए। 5

(ग) यदि $-1 < x < 1$ के लिये $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. 5

(घ) रेखा-युग्मों $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 5

(ड) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ तथा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

5. Do all the parts :

(a) Does the relation defined by $R = \{(x, y) : y \text{ is divisible by } x\}$ on the set $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, an equivalence relation ? 5

(b) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. 5

(c) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ for $-1 < x < 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. 5

(d) Find the angle between the pair of lines : $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$. 5

(e) Find the shortest distance between the lines : $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श-रेखा और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

(ख) परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभि लम्ब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) अवकल समीकरण $y dx - (x + 2y^2)dy = 0$ को हल कीजिए। 5

(घ) व्यरोधों $5x + 3y \leq 15$, $2x + 5y \leq 10$ तथा $x \geq 0$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 8x + 5y$ का अधिकतम मान आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए। 5

(ड) बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियाँ और एक लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के, एक लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह से यादृच्छया एक बच्चा चुना जाता है। तीनों चुने गये बच्चों में एक लड़की एवं 2 लड़के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

6. Do all the parts :

- (a) Find the equations of the tangent and normal to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ at the point $(1, 1)$. 5
- (b) Find the area of the region enclosed by the parabola $y^2 = 4ax$ and its latus rectum. 5
- (c) Solve the differential equation $y dx - (x + 2y^2)dy = 0$. 5
- (d) Find the maximum value of $Z = 8x + 5y$ under the constraints $5x + 3y \leq 15$, $2x + 5y \leq 10$ and $x \geq 0$, $y \geq 0$ by graphical method. 5
- (e) There are three group of children having 3 girls and one boy, 2 girls and 2 boys, one girl and 3 boys respectively. One child is selected at random from each group. Find the probability that three selected children has one girl and 2 boys. 5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A \cdot \text{adj}(A) = |A|I$ तथा A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

(ख) आव्यूह विधि से निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$$x + z = 2y$$

8

7. Do any one part :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then verify that $A \cdot \text{adj}(A) = |A|I$ and find A^{-1} .

8

(b) Solve the following system of linear equations by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$$x + z = 2y$$

8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

8

(ख) दिखाइए कि $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$; जहाँ c_1, c_2 अचर हैं, अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 - b^2)y = 0$ का हल है।

8

8. Do any one part :

(a) Evaluate : $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

8

(b) Show that $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, where c_1, c_2 are constants, is a solution of the differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 - b^2)y = 0$.

8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए : $\int_0^\pi \log(1 + \cos x) dx = -\pi \log 2$

8

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x, (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$.

8

9. Do any one part :

(a) Prove that : $\int_0^\pi \log(1 + \cos x) dx = -\pi \log 2$

8

(b) Find particular solution of differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x, (x \neq 0)$ it is given that $y = 0$ if $x = \frac{\pi}{2}$.

8