

अनुक्रमांक : _____

नाम : _____

131

324(JA)

2025
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :

- (i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- (vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions:

- (i) There are in all nine questions in this question paper.
- (ii) All questions are compulsory.
- (iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ में $R = \{(a, b) : b = a + 2\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है : 1

- (i) स्वतुल्य और सममित नहीं, किन्तु संक्रामक
- (ii) स्वतुल्य और संक्रामक नहीं, किन्तु सममित
- (iii) सममित और संक्रामक नहीं, किन्तु स्वतुल्य
- (iv) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न ही संक्रामक

(ख) यदि आव्यूहों A और B की कोटियाँ क्रमशः $m \times n$ और $n \times p$ हों, तो AB की कोटि होगी : 1

- (i) $m \times p$
- (ii) $p \times m$
- (iii) $m \times n$
- (iv) $n \times p$

(ग) अवकल समीकरण $7 \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 + 5 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ की घात होगी : 1

- (i) 3
- (ii) 2
- (iii) 6
- (iv) 5

(घ) सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिक्-कोज्याएँ हैं : 1

- (i) $(1, 1, -2)$
- (ii) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$
- (iii) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$

(iv) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(ङ) यदि R^* सभी शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो, तो $f : R^* \rightarrow R^*$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $f(x) = \frac{1}{x}$ है : **1**

- (i) एकैकी और आच्छादक
- (ii) बहु-एक और आच्छादक
- (iii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं
- (iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

1. Do all the parts of the following:

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book:

(a) The relation $R = \{(a, b) : b = a+2\}$ defined in the set $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ is : **1**

- (i) not reflexive and symmetric, but transitive
- (ii) not reflexive and transitive, but symmetric
- (iii) not symmetric and transitive, but reflexive
- (iv) not reflexive, not symmetric and not also transitive

(b) If the orders of the matrices A and B are $m \times n$ and $n \times p$ respectively, then the order of AB will be : **1**

- (i) $m \times p$
- (ii) $p \times m$
- (iii) $m \times n$
- (iv) $n \times p$

(c) The degree of the differential equation $7 \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 5 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ will be : **1**

- (i) 3

(ii) 2

(iii) 6

(iv) 5

(d) The direction cosines of the vector $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ are : **1**

(i) (1, 1, -2)

(ii) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(iii) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(iv) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(e) If R^* be the set of all non-zero real numbers, then the mapping $f : R^* \rightarrow R^*$ defined by $f(x) = \frac{1}{x}$ is : **1**

(i) one-one and onto

(ii) many-one and onto

(iii) one-one, but not onto

(iv) neither one-one nor onto

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) जाँच कीजिए कि क्या फलन $f : R \rightarrow R$ जो $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{if } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है, $x = 1$ पर संतत है या नहीं। **1**

(ग) $\int x^3 e^{x^4} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) यदि $P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) मान लीजिए कि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ है। क्या $|\vec{a}| = |\vec{b}|$? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं? **1**

2. Do all the parts of the following :

(a) Find the principal value of $\cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. **1**

(b) Test whether the function $f : R \rightarrow R$ defined by $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{if } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ is continuous at $x = 1$. **1**

(c) Find the value of $\int x^3 e^{x^4} dx$. **1**

(d) If $P(B) = \frac{9}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, then find $P(A/B)$. **1**

(e) Let $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$. Is $|\vec{a}| = |\vec{b}|$? Are the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ equal? **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $y = \tan^{-1} \left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2} \right)$, जहाँ $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ । **2**

(ख) $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) यदि R_1 और R_2 समुच्चय A में तुल्यता सम्बन्ध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है। **2**

(घ) यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए। **2**

3. Do all the parts of the following :

(a) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ if $y = \tan^{-1} \left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2} \right)$, where $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2**

(b) Find the value of $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$. **2**

(c) If R_1 and R_2 are equivalence relations in the set A , prove that $R_1 \cap R_2$ is also an equivalence relation in A . **2**

(d) If two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ such that $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, then find $|\vec{a} - \vec{b}|$. **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

(ख) एक पासे को एक बार उछाला जाता है। यदि घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 की अपवर्त्य है' को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाये, तो बताइए कि क्या घटनायें E और F स्वतन्त्र हैं। 2

(ग) यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, तो $(A + 2B)'$ ज्ञात कीजिए। 2

(घ) दिखाइए कि फलन $f(x) = \log \sin x$ अन्तराल $(0, \frac{\pi}{2})$ में वर्धमान और $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में ह्रासमान है। 2

4. Do all the parts of the following :

(a) The Cartesian equation of a line is $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$. Find its vector equation. 2

(b) A die is thrown once. If the event 'the number obtained on the die is a multiple of 3' is represented by E and 'the number obtained on the die is even' is represented by F , tell whether the events E and F are independent. 2

(c) If $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, find $(A + 2B)'$. 2

(d) Show that the function $f(x) = \log \sin x$ is increasing in the interval $(0, \frac{\pi}{2})$ and decreasing in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सारणिक $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & x \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5

(ख) यदि $y = x^{x^{\dots \text{to infinity}}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y \log x}$ 5

(ग) $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right) = \frac{x}{2}, x \in (0, \pi/4)$ 5

(ङ) अवकल समीकरण $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के लिए बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए। 5

5. Do all the parts of the following :

(a) Find the value of the determinant
$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & x \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}.$$

5

(b) If $y = x^{x^{\dots \text{to infinity}}}$, prove that $x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y \log x}$. 5

(c) Evaluate : $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$. 5

(d) Prove that $\cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right) = \frac{x}{2}, x \in (0, \pi/4)$. 5

(e) For the differential equation $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$, find the curve passing through the point $(1, -1)$. 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया है। हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने की तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकतायें क्रमशः 0.80 तथा 0.32 हैं। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 200x + 500y$ का न्यूनतमकरण आलेखीय विधि से कीजिए :

$$x + 2y \geq 0, 3x + 4y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0. \quad \text{5}$$

(ग) रेखायें, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k} \text{ और } \vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}. \quad 5$$

(घ) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. 5

(ङ) हल कीजिए : $y dx - (x + 2y^2)dy = 0$. 5

6. Do all the parts of the following :

(a) A person has taken the contract of a construction work. The probability of strike is 0.65. The probabilities of the construction work being completed on time in the circumstances of no strike and strike are respectively 0.80 and 0.32. Find the probability of the construction work being completed on time. 5

(b) Minimize $Z = 200x + 500y$ by graphical method subject to the following constraints :

$$x + 2y \geq 0, 3x + 4y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0. \quad 5$$

(c) Find the shortest distance between the lines whose vector equations are the following :

$$\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k} \text{ and } \vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}. \quad 5$$

(d) For two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. 5

(e) Solve : $y dx - (x + 2y^2)dy = 0$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके

निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

8

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा I कोटि 2 का तत्समक आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$. 8

7. Do any one part of the following :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, find A^{-1} . Using A^{-1} solve the following system of equations :

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

8

(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ and I is the identity matrix of order 2, prove that $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि दिये हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब वृत्तीय शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}(1/3)$ होता है। 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$. 8

8. Do any one part of the following :

(a) Prove that the semi-vertical angle of a right circular cone of given surface and maximum volume is $\sin^{-1}(1/3)$. 8

(b) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

(ख) हल कीजिए : $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$. 8

9. Do any one part of the following :

(a) Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. **8**

(b) Solve : $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$. **8**