मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक : _____ नाम : _____

131 **324 (FH)**

2022
गणित

(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

(ii) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 7\}$, तो $A \times (B \cup C)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) हल कीजिए : $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$. **1**

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\csc^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} x$. **1**

(घ) समतल $2x - y + z = 5$ के अभिलम्ब के दिक अनुपात ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **1**

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) निम्न का मान ज्ञात कीजिए : $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$. **1**

(ख) सिद्ध कीजिए : $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$. **1**

(ग) यदि $x = a\cos^2 2t$ और $y = a\sin^2 2t$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए $(A - B)' = A' - B'$. **1**

(ङ) यदि $P(A) = 0.12, P(B) = 0.15$ और $P(B/A) = 0.18$, तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ एकैकी हैं, तो $gof : A \to C$ भी एकैकी है। **2**

(ख) यदि $x = \sin y$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$. **2**

(ग) क्या $f(x) = |x|; x = 0$ पर अवकलनीय है ? **2**

(घ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। उस दौड़ में A और B में से कोई न जीत पाए, इसकी प्रायिकता क्या है ? **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $f : Q \to Q$, संबंध $f(x) = 3x - 4, x \in Q$ से परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि यह एकैकी आच्छादक फलन है, जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। **2**

(ख) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात करें। **2**

(ग) एक थैले में 4 सफेद और 2 काली गेंदें तथा दूसरे थैले में 3 सफेद और 5 काली गेंदें हैं। यदि प्रत्येक

थैले से एक गेंद निकाली जाय तो दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$ निम्न में किसके बराबर है : **2**

(i) $-\cot(e^x)+c$

(ii) $\tan(xe^x)+c$

(iii) $\tan(e^x)+c$

(iv) $\cot(e^x)+c$

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) दर्शाइए कि : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\right.$ **5**

(ग) समतल $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})+1=0$ पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब इकाई सदिश की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) $\int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$ का मान ज्ञात करें। **5**

(ङ) सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$. **5**

(च) सिद्ध कीजिए कि दी गयी तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है। **5**

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए : $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x-2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ **5**

(ख) x के सापेक्ष में $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ का अवकलन कीजिए। **5**

(ग) अवकल समीकरण $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाले वक्र को ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) किसी प्रश्न को तीन छात्रों A, B, C के हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ तथा $\frac{1}{10}$ हैं, तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) $z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्न दिये गये अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए : $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90, x \geq 0, y \geq 0$. **5**

(च) दिए गये वक्र $x = a\sin^3 t, y = b\cos^3 t$ के एक बिन्दु जहाँ $t = \frac{\pi}{2}$ है, पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करें : $x + y + z = 8$

$x - y + z = 2$

$2x + y - z = 1$ **8**

(ख) यदि $\begin{bmatrix} x-5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) एक घन का आयतन $9\ \text{cm}^3/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई $10\ \text{cm}$ है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ? **8**

(ख) ऐसे परवलयों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनका शीर्ष मूल बिन्दु पर तथा जिनका अक्ष धनात्मक x-अक्ष की दिशा में है। **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

(English Version)

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt all parts of the following:

(a) If $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 7\}$ then find $A \times (B \cup C)$. **1**

(b) Solve: $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$. **1**

(c) Prove that $\csc^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} x$. **1**

(d) Find the direction ratio of the normal to the plane $2x - y + z = 5$. **1**

(e) Find the angle between the vectors $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. **1**

2. Attempt all parts of the following:

(a) Evaluate $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$. **1**

(b) Prove that $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$. **1**

(c) If $x = a\cos^2 2t$ and $y = a\sin^2 2t$ then find $\frac{dy}{dx}$. **1**

(d) If $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then show that $(A - B)' = A' - B'$. **1**

(e) If $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ and $P(B/A) = 0.18$, then find the value of $P(A \cap B)$. **1**

3. Attempt all parts of the following:

(a) Prove that if $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are one-to-one, then $gof : A \to C$ is also one-to-one. **2**

(b) If $x = \sin y$, then prove that $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$. **2**

(c) Is $f(x) = |x|$ differentiable at $x = 0$? **2**

(d) The probability of A to win the race is $\frac{1}{3}$ and that of B to win the race is $\frac{1}{4}$. Find the probability that in this race neither A nor B wins the race. **2**

4. Attempt all parts of the following:

(a) The function $f : Q \to Q$ is defined by the relation $f(x) = 3x - 4, x \in Q$. Prove that it is one-to-one and onto mapping where Q is the set of rational numbers. **2**

(b) Find the projection of vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on the vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. **2**

(c) There are 4 white and 2 black balls in a bag and in another bag 3 white and 5 black balls. Find the probability of getting both black balls if a ball is drawn from each bag. **2**

(d) Show $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\, dx$ is equal to which of the following: **2**

(i) $-\cot(e^x) + c$

(ii) $\tan(xe^x) + c$

(iii) $\tan(e^x) + c$

(iv) $\cot(e^x) + c$

5. Attempt any five parts of the following:

(a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$. **5**

(b) Show that $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (abc)\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \right.$ **5**

(c) Find the direction cosine of orthogonal unit vector drawn from the origin on the plane $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$. **5**

(d) Evaluate $\int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$. **5**

(e) Find the normal unit vector for each of vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **5**

(f) Prove that the semi-vertical angle of a cone with given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. **5**

6. Attempt any five parts of the following:

(a) Discuss the continuity of the function $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{if } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$. **5**

(b) Differentiate $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ with respect to x. **5**

(c) Find the equation of the curve passing through the point $(1, -1)$ whose differential equation is $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$. **5**

(d) The probability of solving a question by three students A, B and C are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{10}$. Find the probability of solving the question. **5**

(e) Find the maximum value of $z = 4x + y$ under the constraints given by $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **5**

(f) Find the equation of the tangent to the curve $x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$ at the point where $t = \frac{\pi}{2}$. **5**

7. Attempt any one part of the following:

(a) Solve the following system of equations by matrix method: $x + y + z = 8$
$x - y + z = 2$
$2x + y - z = 1$. **8**

(b) If $\begin{bmatrix} x-5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, then determine x. **8**

8. Attempt any one part of the following:

(a) The volume of a cube is increasing at the rate of 9 cm^3/s. Find the rate by which its surface area is increasing if the length of the edge of the cube is 10 cm. **8**

(b) Find the differential equation of a family of parabolas whose vertices are at the origin and whose axes are in the positive side of the x-axis. **8**

9. Attempt any one part of the following:

(a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$. **8**

(b) Evaluate $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\, dx$. **8**