अनुक्रमांक : _____ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : _____

131 **324 (EX)**

2024
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) यदि आव्यूह A और B के क्रम क्रमश: $p \times q$ और $q \times r$ हैं, तो AB का क्रम है : **1**

(i) $p \times r$

(ii) $r \times p$

(iii) $q \times p$

(iv) इनमें से कोई नहीं

(ख) किस बिन्दु पर रेखा $y = x + 1$ की ढाल वक्र $y^2 = 4x$ की ढाल के बराबर होगी ? **1**

(i) $(1, 2)$

(ii) $(2, 1)$

(iii) $(1, -2)$

(iv) $(-1, 2)$

(ग) समाकलन $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx$ का मान है : **1**

(i) $\sin x + \cos x + c$

(ii) $\sin x - \cos x + c$

(iii) $\cos x - \sin x + c$

(iv) $-\cos x - \sin x + c$

(घ) यदि सदिश $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ और $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो λ का मान है : **1**

(i) 3

(ii) 4

(iii) 6

(iv) 0

(ङ) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ का घात है : **1**

(i) 4

(ii) 3

(iii) 1

(iv) 2

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर संतत नहीं है। **1**

(ख) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) यदि $y = Ae^x + B$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$, जहाँ A तथा B अचर हैं। **1**

(घ) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$ को हल कीजिए। **1**

(ङ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। इस दौड़ में, A और B में से कोई न जीत पाए, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **1**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N पर एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$ से व्यक्त किया गया है। क्या $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ सत्य है ? एक उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए। **2**

(ख) यदि $y = \frac{x^2+3x+4}{e^x \cos x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$ को हल कीजिए। **2**

(घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है। पासे पर प्राप्त संख्या जो 3 का अपवर्त्य है, को E से, और पासे पर प्राप्त संख्या जो सम है, को F से, निरूपित किया गया है। क्या E तथा F स्वतंत्र घटनाएँ हैं ? **2**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) अवकलन कीजिए : $y = (\cos x)^{\sin x}$ **2**

(ख) किसी लीप ईयर (अधिवर्ष) में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) बिन्दु $(5, 2, -4)$ से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ से $B = \{1, 4, 5\}$ में सम्बन्ध R "छोटा है" हो, तो R से संबंधित क्रमित युग्मों का समुच्चय ज्ञात कीजिए तथा B से A तक सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए। **5**

(ख) x, y, z के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण $A'A = I$ को सन्तुष्ट करता है। **5**

(ग) x के सापेक्ष $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकलन कीजिए। **5**

(घ) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $z = x + 3y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :
$x + y \leq 8,\ 3x + 5y \geq 15,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$ **5**

(ङ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) ऐसी दो धन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 15 है और जिनके वर्गों का योगफल न्यूनतम है। **5**

(ख) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ पर लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए, तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) भी ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ जहाँ $n \in N$. **5**

(ङ) एक प्रश्न को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से प्रश्न हल करने का प्रयास करते हैं, तो (i) उनमें से कोई भी प्रश्न हल न कर पाए, (ii) कम-से-कम एक उसे हल कर ले, की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) निम्न समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$2x + 3y + 3z = 5$

$x - 2y + z = -4$

$3x - y - 2z = 3.$ **8**

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण को हल कीजिए : $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ **8**

(ख) अवकल समीकरण को हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$, यदि $y = 1$ जबकि $x = 1.$ **8**

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ **8**

(ख) सिद्ध कीजिए कि : $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)dx = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ **8**

Instructions:

(i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

(ii) There are in all nine questions in this question paper.

(iii) All questions are compulsory.

(iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(v) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do all parts :

Select the correct option of each part and write it on your answer book.

(a) If orders of matrices A and B are $p \times q$ and $q \times r$ respectively, then order of AB is : **1**

(i) $p \times r$

(ii) $r \times p$

(iii) $q \times p$

(iv) None of these

(b) At which point is the slope of the line $y = x + 1$ equal to the slope of the curve $y^2 = 4x$? **1**

(i) $(1, 2)$

(ii) $(2, 1)$

(iii) $(1, -2)$

(iv) $(-1, 2)$

(c) The value of the integral $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ is : **1**

(i) $\sin x + \cos x + c$

(ii) $\sin x - \cos x + c$

(iii) $\cos x - \sin x + c$

(iv) $-\cos x - \sin x + c$

(d) If vectors $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ and $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ are perpendicular to each other, then the value of λ is : **1**

(i) 3

(ii) 4

(iii) 6

(iv) 0

(e) The degree of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ is : **1**

(i) 4

(ii) 3

(iii) 1

(iv) 2

2. Do all the parts :

(a) Show that the function $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ is not continuous at $x = 0$. **1**

(b) Find the principal value of $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. **1**

(c) If $y = Ae^x + B$ where A, B are constants, then show that $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$. **1**

(d) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. **1**

(e) The probability of A winning the race is $\frac{1}{3}$ and that of B is $\frac{1}{4}$. In this race, find the probability that neither A nor B can win the race. **1**

3. Do all the parts :

(a) R is a relation on a set of natural numbers N defined by $R = \{(a, b) : a, b \in N \text{ and } a = b^2\}$. Is $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ true ? Justify it by one example. **2**

(b) If $y = \frac{x^2+3x+4}{e^x \cos x}$, then find $\frac{dy}{dx}$. **2**

(c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$. **2**

(d) A die is thrown once. The number on the die is a multiple of 3 is denoted by E, and the number on the die is even is denoted by F. Are E and F independent events ? **2**

4. Do all the parts :

(a) Differentiate : $y = (\cos x)^{\sin x}$ **2**

(b) Find the probability of 53 Sundays in a leap year. **2**

(c) Find the vector equation of the line which passes through the point $(5, 2, -4)$ and parallel to the vector $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$. **2**

(d) Find the value of : $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$. **2**

5. Do all the parts :

(a) If R is the relation "less than" from $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ to $B = \{1, 4, 5\}$, find the set of ordered pairs corresponding to R. Also define this relation from B to A. **5**

(b) Find the values of x, y, z if the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A'A = I$. **5**

(c) Differentiate : $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ with respect to x. **5**

(d) Find the minimum value of $z = x + 3y$ under the following constraints :
$x + y \leq 8,\ 3x + 5y \geq 15,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$ **5**

(e) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$. **5**

6. Do all the parts :

(a) Find two positive numbers whose sum is 15 and the sum of their squares is minimum. **5**

(b) Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$. **5**

(c) Find the perpendicular unit vectors on the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ and find the sine of the angle between them. **5**

(d) If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, prove that $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ where $n \in N$. **5**

(e) The probabilities of solving a question by A and B independently are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both of them try to solve it independently, find the probability that
(i) none of them solved it.
(ii) at least one of them solved it. **5**

7. Do any one part :

(a) If matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}. **8**

(b) Solve the system of equations by matrix method :
$2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3.$ **8**

8. Do any one part :

(a) Solve the differential equation : $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ **8**

(b) Solve the differential equation : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$, if $y = 1$ when $x = 1$. **8**

9. Do any one part :

(a) Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ **8**

(b) Prove that : $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)dx = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ **8**