

अर्द्धवार्षिक परीक्षा, 2026-27

गणित कक्षा-12

समय : 3 घण्टे

(पूर्णांक : 100)

नोट –

- (1) सभी प्रश्न हल करना है। प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (2) प्रश्नों के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
- (3) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता है, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए—

$$1 \times 5 = 5$$

(क) फलन $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 3x \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन होगा—

- (अ) एकैकी नहीं
- (ब) आच्छादक नहीं
- (स) एकैकी आच्छादक
- (द) बहुएक

(ख) अवकल समीकरण $7 \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 + 5 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^3 + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ की घात होगी—

- (अ) 3
- (ब) 2
- (स) 6
- (द) 5

(ग) यदि सदिश $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, सदिश $5\vec{i} - \lambda\vec{j} + 2\vec{k}$ पर लम्बवत है, तो λ का मान है-

(अ) 3

(ब) 0

(स) 4

(द) 6

(घ) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान होगा-

(अ) $\frac{3\pi}{4}$

(ब) $\frac{\pi}{4}$

(स) $\frac{\pi}{2}$

(द) 0

(ङ) यदि आव्यूहों A और B की कोटियाँ क्रमशः $m \times n$ और $n \times p$ हैं, तो AB की कोटि होगी-

(अ) $m \times p$

(ब) $p \times m$

(स) $m \times n$

(द) $n \times p$

2. सभी खण्ड कीजिए-

$$1 \times 5 = 5$$

(क) दिखाइए कि फलन $f(x) = 7x^2 - 3$ एक वर्धमान फलन है, जबकि $x > 0$ ।

(ख) सदिशों $-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ और $3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करो।

(ग) यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ ।

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो, दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है, तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात करो।

(ङ) यदि $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)$ एक सतत फलन है।

3. सभी खण्ड कीजिए-

2 × 4 = 8

(क) कोटि 2 के दो व्युत्क्रमणीय आव्यूहों के लिए सिद्ध करो कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ।

(ख) $\cos^{-1}(e^{-x})$ का अवकलन गुणांक ज्ञात करो।

(ग) यदि $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{3, 4, 5\}$, तो A से B में सम्बन्धों की कुल संख्या कितनी होगी ?

(घ) $\int x \log x \, dx$ का मान बताओ।

4. सभी खण्ड कीजिए-

2 × 4 = 8

(क) यदि $y = 5x^2 + 4$, तो बिन्दु $(2, 1)$ पर ढाल ज्ञात करो।

(ख) यदि $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}(2) = \tan^{-1}(\alpha)$ है, तो दिखाइए कि α का मान ज्ञात कीजिए।

(ग) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

(घ) एक घन का आयतन $9 \text{ cm}^3/\text{sec}$ की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 10 cm है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ?

5. सभी खण्ड कीजिए-

5 × 5 = 25

(क) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y) \mid y \text{ भाज्य है } x \text{ से}\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध क्या तुल्यता सम्बन्ध है ?

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा

विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में लिखो।

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 +$

$5A + 11I = 0$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

6. सभी खण्ड कीजिए-

5 × 5 = 25

(क) परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलम्ब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(ख) अन्तराल ज्ञात करो जिसमें फलन $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त

फलन वर्धमान है।

(ग) x के सापेक्ष अवकलन गुणांक ज्ञात करो।

(घ) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके विकर्ण $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ और $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ हैं।

(ङ) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. कोई एक खण्ड कीजिए—

$$8 \times 1 = 8$$

(क) समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए:

$$x + y + z = 2$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x - y + z = 4$$

(ख) सदिशों $-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ और $3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करो।

8. कोई एक खण्ड कीजिए—

$$8 \times 1 = 8$$

(क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$ ।

(ख) दिखाइए कि $y = C_1 e^{2x} \cos bx + C_2 e^{2x} \sin bx$, जहाँ C_1, C_2 अचर हैं, तो सिद्ध करो कि $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0$ ।

9. कोई एक खण्ड कीजिए—

$$8 \times 1 = 8$$

(क) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत शंकु का महत्तम आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।
