अनुक्रमांक : _____ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : _____

131 **324(FB)**

2024
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) फलन $f : R \to R, f(x) = 5x \; \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए : **1**

(i) f आच्छादक है

(ii) f बहु-एकैकी है

(iii) f आच्छादक नहीं है

(iv) f एकैकी नहीं है

(ख) अवकल समीकरण $5x^2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + y = 0$ की कोटि होगी : **1**

(i) 2

(ii) 1

(iii) 3

(iv) 4

(ग) समाकलन $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान होगा : **1**

(i) $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\frac{2\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{6}$

(iv) $\frac{\pi}{12}$

(घ) व्यंजक $\hat{i}\cdot\hat{i} + \hat{j}\cdot\hat{j} + \hat{k}\cdot\hat{k}$ का मान होगा : **1**

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 3

(ङ) यदि A तथा B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह कोटि n के हैं, तो $(AB)^{-1}$ बराबर है : **1**

(i) $B^{-1}A^{-1}$

(ii) $A^{-1}B^{-1}$

(iii) $A^{-1}B$

(iv) AB^{-1}

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ तो A से B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। दोनों पर पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) यदि सदिशों $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) यदि $P(A) = \frac{3}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ तो $P(B/A)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) यदि $y = \log_e(\tan x)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x - 1|$, $x = 1$ पर संतत है। **2**

(ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) यदि $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ मात्रक सदिश हैं और $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ तो $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) $\int \log x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) फलन x^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों $\bar{a}$ और $\bar{b}$ के लिए सदैव $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$ होता है। **5**

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. **5**

(ग) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ को हल कीजिए। **5**

(घ) यदि $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) यदि $y = x\cos(a+y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$. **5**

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) एक पासे को तीन बार फेंका जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्राप्त अंकों में से एक अंक विषम संख्या होगी। **5**

(ख) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए :
$2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0.$ **5**

(ग) हल कीजिए : $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$ **5**

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है। **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) (i) रेखा युग्म $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ तथा $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
(ii) यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक $(1, 5, -1)$, $(0, 4, -2)$ और $(2, 3, 4)$ हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) रैखिक समीकरण निकाय $2x - 3y + 5z = 11$, $3x + 2y - 4z = -5$, $x + y - 2z = -3$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। **8**

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$. **8**

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

Instructions / Note:

(i) First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

(ii) There are in all nine questions in this question paper.

(iii) All questions are compulsory.

(iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(v) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vii) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. Attempt all the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write it in your answer-book :

(a) Function $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 5x, \forall x \in R$. Select the correct answer : **1**

(i) f is onto

(ii) f is many one

(iii) f is not onto

(iv) f is not one-one

(b) Order of the differential equation $5x^2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + y = 0$ will be : **1**

(i) 2

(ii) 1

(iii) 3

(iv) 4

(c) The value of the integral $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ will be : **1**

(i) $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\frac{2\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{6}$

(iv) $\frac{\pi}{12}$

(d) The value of the expression $\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ will be : **1**

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 3

(e) If A and B are two invertible matrices of order n then $(AB)^{-1}$ is equal to : **1**

(i) $B^{-1}A^{-1}$

(ii) $A^{-1}B^{-1}$

(iii) $A^{-1}B$

(iv) AB^{-1}

2. Do all the parts of the following :

(a) If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, then find the number of relations from A to B. **1**

(b) Two coins are tossed together. Find the probability of getting both tails. **1**

(c) If the vectors $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular to each other then find the value of λ. **1**

(d) If $P(A) = \frac{3}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ then find the value of $P(B/A)$. **1**

(e) If $y = \log_e(\tan x)$, then find $\frac{dy}{dx}$. **1**

3. Do all the parts of the following :

(a) Prove that the function $f(x) = |x - 1|$ is continuous at $x = 1$. **2**

(b) Find the value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$. **2**

(c) If the unit vectors $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ are such that $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ then find the value of $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$. **2**

(d) Find the value of $\int \log x \, dx$. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) If $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ then find $\frac{dy}{dx}$. **2**

(b) Find the differential coefficient of the function x^x with respect to 'x'. **2**

(c) Find the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$. **2**

(d) Prove that the function $f(x) = |x|$ is not differentiable at $x = 0$. **2**

5. Do all the parts of the following :

(a) Prove that for the two vectors $\bar{a}$ and $\bar{b}$ will always be $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$. **5**

(b) Show that $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. **5**

(c) Solve the differential equation $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$. **5**

(d) If $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ then find $\frac{dy}{dx}$. **5**

(e) If $y = x\cos(a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$. **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) If a die is thrown three times, then find the probability of getting one appearing number in them will be odd. **5**

(b) Minimize $Z = x + 2y$ under the following constraints :
$2x + y \geq 3$, $x + 2y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **5**

(c) Solve : $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx$. **5**

(d) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, show that $A^2 - 5A + 7I = 0$ and also find A^{-1} with its help. **5**

(e) Show that the semi-vertical angle of the right circular cone of maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. **5**

7. Do any one part of the following :

(a) Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. **8**

(b) (i) Find the angle between the pair of lines $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ and $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$.
(ii) If the coordinates of mid-points of the sides of a triangle are $(1, 5, -1)$, $(0, 4, -2)$ and $(2, 3, 4)$ then find the coordinates of its vertices. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method :
$2x - 3y + 5z = 11$
$3x + 2y - 4z = -5$
$x + y - 2z = -3$. **8**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, find A^{-1}. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$. **8**

(b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$. **8**