

अनुक्रमांक : _____

नाम : _____

131

324(IX)

2025
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

- (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्ट उल्लेख है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।
- (v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो, उसमें व्यर्थ समय नष्ट न कीजिए।

General Instructions:

- (i) There are in all nine questions in this question paper.
- (ii) All questions are compulsory.
- (iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- (iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one. Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. सभी खण्ड कीजिए ।

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f : R \rightarrow R^+$ है 1

- (A) एकैकी और आच्छादक
- (B) बहु-एकैकी और आच्छादक
- (C) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं
- (D) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a = b-1, b \geq 3\}$ समुच्चय N पर परिभाषित है तो : 1

- (A) $(2, 4) \in R$
- (B) $(4, 5) \in R$
- (C) $(4, 6) \in R$
- (D) $(1, 3) \in R$

(ग) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान होगा : 1

- (A) 0
- (B) $\frac{\pi}{2}$
- (C) $\frac{\pi}{4}$
- (D) $\frac{\pi}{8}$

(घ) अवकल समीकरण $9\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$ की कोटि है : 1

- (A) 1
- (B) 6
- (C) 3
- (D) 2

(ङ) व्यंजक $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \times \hat{k}$ का मान है : 1

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

1. Do all parts.

Select the correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) The modulus function $f : R \rightarrow R^+$ given by $f(x) = |x|$ is **1**

- (A) one-one and onto
- (B) many-one and onto
- (C) one-one but not onto
- (D) neither one-one nor onto

(b) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 1, b \geq 3\}$ is defined on set N , then **1**

- (A) $(2, 4) \in R$
- (B) $(4, 5) \in R$
- (C) $(4, 6) \in R$
- (D) $(1, 3) \in R$

(c) The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ will be **1**

- (A) 0
- (B) $\frac{\pi}{2}$
- (C) $\frac{\pi}{4}$
- (D) $\frac{\pi}{8}$

(d) The degree of differential equation $9\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$ is **1**

- (A) 1

(B) 6

(C) 3

(D) 2

(e) The value of expression $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \times \hat{k}$ is **1**

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\cot^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right\}; x > 1$ को सरलतम रूप में लिखिए। **1**

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है। **1**

(ग) अवकल समीकरण $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \left(\frac{dy}{dx} \right) = 2$ की घात ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) यदि $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ और $P(B/A) = 0.18$ तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) सदिशों $-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **1**

2. Do all parts :

(a) Write $\cot^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right\}; x > 1$ in the simplest form. **1**

(b) Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. **1**

(c) Find the degree of the differential equation $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \left(\frac{dy}{dx} \right) = 2$. **1**

(d) If $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ and $P(B/A) = 0.18$, then find the value of $P(A \cap B)$. **1**

(e) Find the angle between the vectors $-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. **1**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $f : R \rightarrow R$ तथा $g : R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए $g \circ f \neq f \circ g$. **2**

(ख) अवकल समीकरण $y dx + (x - y^2) dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) सिद्ध कीजिए कि $(4, 4, 2)$, $(3, 5, 2)$ तथा $(-1, -1, 2)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। **2**

(घ) यदि $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, तो x, y, z के मान ज्ञात कीजिए। **2**

3. Do all parts :

(a) If $f : R \rightarrow R$ and $g : R \rightarrow R$ be functions defined by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$ respectively, then prove that $g \circ f \neq f \circ g$. **2**

(b) Find the general solution of differential equation $y dx + (x - y^2) dy = 0$. **2**

(c) Prove that $(4, 4, 2)$, $(3, 5, 2)$ and $(-1, -1, 2)$ are vertices of a right angle triangle. **2**

(d) If $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, then find the values of x, y, z . **2**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि फलन $f(x) = 7x^2 - 3$ एक वर्धमान फलन है जबकि $x > 0$. **2**

(ख) सदिशों $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक पर लंबवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **2**

(ग) यदि एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$, तो इसका सदिश रूप में समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) एक थैले में 4 सफेद और 2 काली गेंद हैं तथा दूसरे थैले में 3 सफेद और 5 काली गेंद हैं। यदि प्रत्येक थैले से एक गेंद निकाली जाये तो दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

4. Do all parts :

(a) Show that the function $f(x) = 7x^2 - 3$ is an increasing function when $x > 0$. 2

(b) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. 2

(c) If the Cartesian equation of a line is $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$, then find its equation in vector form. 2

(d) There are 4 white and 2 black balls in a bag and in another bag 3 white and 5 black balls. Find the probability of getting both black balls if a ball is drawn from each bag. 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में दो तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता संबंध है। 5

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(I + A) = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$. 5

(ग) $\tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 5

(घ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ तथा $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) यदि $y = e^{\tan^{-1} x}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(1 + x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x - 1) \frac{dy}{dx} = 0$. 5

5. Do all parts :

(a) If R_1 and R_2 be two equivalence relations on a set A , then prove that $R_1 \cap R_2$ be also an equivalence relation. 5

(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, then prove that $(I+A) = (I-A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.
5

(c) Differentiate $\tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)$ with respect to x . 5

(d) Find shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$. 5

(e) If $y = e^{\tan^{-1} x}$, prove that $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} = 0$. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{if } x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

तब $x = -1$ तथा $x = 1$ पर फलन के संतत की जाँच कीजिए। 5

(ख) तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ प्रतिबंध $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ को संतुष्ट करते हैं। यदि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ और $|\vec{c}| = 2$ तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ग) हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ cm/s की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है? 5

(घ) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 2y$ का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि :

$$x + y \geq 8, \quad 3x + 5y \leq 15, \quad x \geq 0, y \geq 0 \quad 5$$

(ङ) किसी प्रश्न को तीन छात्रों A, B, C के द्वारा हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{10}$ है, तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

6. Do all parts :

(a) If $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{if } x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

Then test the continuity of the function at $x = -1$ and at $x = 1$. 5

- (b) If three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ satisfying the condition $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. If $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ and $|\vec{c}| = 2$, then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.
5

- (c) The radius of an air bubble is increasing at the rate of $\frac{1}{2}$ cm/s. At what rate is the volume of the bubble increasing while the radius is 1 cm ?
5

- (d) Minimize $Z = 3x + 2y$ by graphical method under the following constraints :
 $x + y \geq 8$, $3x + 5y \leq 15$, $x \geq 0, y \geq 0$.
5

- (e) The probability of solving a question by the three students A, B, C are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{10}$, find the probability of solving the question.
5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

- (क) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।
8

- (ख) समीकरण निकाय $3x - 2y + 3z = 8$, $2x + y - z = 1$, $4x - 3y + 2z = 4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए।
8

7. Do any one part :

- (a) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
8

- (b) Solve the system of equations by matrix method :
 $3x - 2y + 3z = 8$, $2x + y - z = 1$, $4x - 3y + 2z = 4$.
8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

- (क) सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ है।
8

(ख) अवकल समीकरण $(x - y)(dx + dy) = dx - dy$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $y = -1$ यदि $x = 0$. 8

8. Do any one part :

(a) Prove that the semi-vertical angle of a cone with given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. 8

(b) Find a particular solution of the differential equation $(x - y)(dx + dy) = dx - dy$ when $y = -1$ if $x = 0$. 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) समाकलन कीजिए : $\int \left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x} \right) e^x dx$ 8

(ख) हल कीजिए : $\int \frac{(3x+5) dx}{x^3-x^2-x+1}$ 8

9. Do any one part :

(a) Integrate : $\int \left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x} \right) e^x dx$ 8

(b) Solve : $\int \frac{(3x+5) dx}{x^3-x^2-x+1}$ 8