अनुक्रमांक : _____ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : _____

131 **324(BD)**

2023
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारंभ में स्पष्ट उल्लेख है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो, उसमें व्यर्थ समय नष्ट न कीजिए।

General Instructions:

(i) There are nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) At the beginning of each question, it has been mentioned that how many parts of it are to be attempted.

(iv) Marks allotted to each question are mentioned against it.

(v) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question which you cannot solve.

1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड के सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a = b - 1, b > 4\}$, समुच्चय N पर परिभाषित है तो सही उत्तर होगा : **1**

(A) $(2, 4)$

(B) $(4, 5)$

(C) $(4, 6)$

(D) $(3, 5)$

(ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान होगा : **1**

(A) π

(B) $-\pi/2$

(C) 0

(D) $2\sqrt{3}\pi$

(ग) $\cos^{-1}(e^x)$ का अवकल गुणांक होगा : **1**

(A) $\sin^{-1}(e^x)$

(B) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(C) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

(D) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(घ) $\int x\, e^x\, dx$ का मान होगा : **1**

(A) e^x

(B) $(1 + x)e^x$

(C) $(x - 1)e^x$

(D) $(1 - x)e^x$

(ङ) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि होगी : **1**

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) इनमें से कोई नहीं

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{a, b, c\}$ तथा $B = \{1, 2\}$ है, तो A से B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) अवरोधों $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) दिखाइए कि $f(x) = |x|, x = 0$ पर संतत है। **1**

(ङ) यदि $P(A) = \frac{3}{13}, P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$, तो $P(B/A)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $\begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, तो x, y तथा z का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2+y}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f : R \to R^+$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x) = e^x$ एकैकी है। **2**

(घ) यदि $x = a\cos^2 t, y = b\sin^2 t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **2**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु (am^2, am^3) पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) यदि $P(A) = 0.4$ और $P(B) = 0.5$ है तथा A और B स्वतंत्र घटनायें हैं, तो (i) $P(A \cup B)$ तथा (ii) $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2,3,4), B(-1,-2,1)$ तथा $C(5,8,7)$ संरेख हैं। **2**

(घ) $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) माना कि सम्बन्ध $R = \{(a,b) : (a-b)$ 5 का गुणज है$\}$, एक समुच्चय $Z =$ पूर्णांकों का समुच्चय पर परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है। **5**

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A+3X = 5B$ हो, तो आव्यूह X ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) सिद्ध कीजिए : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. **5**

(घ) यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $-1 \le x \le 1$, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$. **5**

(ङ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$ से प्रदत्त फलन $(0, \pi/4)$ में निरंतर वर्धमान फलन है। **5**

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2\cot x, (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $y = 0$ यदि $x = \pi/2$. **5**

(घ) दो रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) $Z = 50x + 70y$ का न्यूनतम मान आलेख विधि से निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए : $2x + y \ge 8, x + 2y \ge 10, x \ge 0, y \ge 0$. **5**

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) एक परिवार में तीन बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात है कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़की है, तो तीनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) $\int_{-1}^{3/2} |x \sin(\pi x)|\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) $y = x^{x^x} + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है। फलन $f(x) = |x+2|$ का $x = -2$ पर सांतत्य और अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए। **8**

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए $A \cdot \text{adj}(A) = |A|I$ तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय आव्यूह विधि से हल कीजिए : $2x + y - z = 1$, $3x - 2y + 3z = 8$, $4x - 3y + 2z = 4$ **8**

General Instructions:

(i) There are nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) At the beginning of each question, it has been mentioned that how many parts of it are to be attempted.

(iv) Marks allotted to each question are mentioned against it.

(v) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question which you cannot solve.

1. Do all parts. Select correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 1, b > 4\}$ is defined on set N then correct answer will be : **1**

(A) $(2, 4)$

(B) $(4, 5)$

(C) $(4, 6)$

(D) $(3, 5)$

(b) The value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ will be : **1**

(A) π

(B) $-\pi/2$

(C) 0

(D) $2\sqrt{3}\pi$

(c) Differential coefficient of $\cos^{-1}(e^x)$ will be : **1**

(A) $\sin^{-1}(e^x)$

(B) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(C) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

(D) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(d) The value of $\int x\, e^x\, dx$ will be : **1**

(A) e^x

(B) $(1+x)e^x$

(C) $(x-1)e^x$

(D) $(1-x)e^x$

(e) The order of the differential equation $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ will be : **1**

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) None of these

2. Do all parts:

(a) If $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2\}$, then find number of relations from A to B. **1**

(b) Find the maximum value of $z = 3x + 4y$ under the constraints $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$. **1**

(c) If vectors $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and $\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ are perpendicular to each other, then find value of λ. **1**

(d) Show that $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. **1**

(e) If $P(A) = \frac{3}{13}, P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$, then find the value of $P(B/A)$. **1**

3. Do all parts:

(a) If $\begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, then find the value of x, y and z. **2**

(b) Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2+y}$. **2**

(ग) Prove that the function $f : R \to R^+$ defined by $f(x) = e^x$ is one-one. **2**

(घ) If $x = a\cos^2 t, y = b\sin^2 t$, then find $\frac{dy}{dx}$. **2**

4. Do all parts:

(a) Find the equation of tangent at the point (am^2, am^3) on the curve $ay^2 = x^3$. **2**

(b) If $P(A) = 0.4$ and $P(B) = 0.5$, also, A and B are independent events, then find (i) $P(A \cup B)$ and (ii) $P(A \cap B)$. **2**

(c) Show that the points $A(2, 3, 4), B(-1, -2, 1)$ and $C(5, 8, 7)$ are collinear. **2**

(d) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$. **2**

5. Do all parts:

(a) Let a relation $R = \{(a, b) : (a - b)$ is multiple of $5\}$ be defined on the set $Z =$ set of integers, then prove that R is an equivalence relation. **5**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ and $2A + 3X = 5B$, then find the matrix X. **5**

(c) Prove that : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. **5**

(d) If $y = e^{a\cos^{-1} x}, -1 \le x \le 1$, then prove that $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$. **5**

(e) Prove that the function $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$ is always increasing function on $(0, \pi/4)$. **5**

6. Do all parts:

(a) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$. **5**

(b) Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **5**

(c) Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x\ (x \neq 0)$ given that $y = 0$ if $x = \pi/2$. **5**

(d) Find the shortest distance between two lines: $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$. **5**

(e) Find the minimum value of $Z = 50x + 70y$ under the following constraints by graphical method: $2x + y \geq 8, x + 2y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0$. **5**

7. Do any one part:

(a) There are three children in a family. If it is known that at least one child is girl among them, find the probability that all three children are girl. **8**

(b) Evaluate : $\int_{-1}^{3/2} |x \sin(\pi x)|\, dx$. **8**

8. Do any one part:

(a) Find differential coefficient of $y = x^{x^x} + (\cos x)^{\tan x}$. **8**

(b) Prove that every differentiable function is continuous. Examine continuity and differentiability of the function $f(x) = |x + 2|$ at $x = -2$. **8**

9. Do any one part:

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj}(A) = |A|I$ also find A^{-1}. **8**

(b) Solve the following system of equation by matrix method: $2x + y - z = 1$, $3x - 2y + 3z = 8$, $4x - 3y + 2z = 4$. **8**