अनुक्रमांक : ______________ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : ________________

131 **324(AY)**

2023
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) यदि $y = 4t$ और $x = \frac{4}{t}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा : **1**

(i) $-t^2$

(ii) $-\frac{1}{t^2}$

(iii) $-\frac{1}{t}$

(iv) t^3

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, तब BA होगा : **1**

(i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(ग) वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब का ढाल होगा : **1**

(i) $\frac{1}{3}$

(ii) 3

(iii) $-\frac{1}{3}$

(iv) -3

(घ) $\int_1^3 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान होगा : **1**

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{12}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

(iv) $\frac{2\pi}{3}$

(ङ) मापांक फलन $f : R \to R^{+}$, $f(x) = |x|$ फलन के द्वारा प्रदत्त है, वह होगा : **1**

(i) एकैकी तथा आच्छादक

(ii) बहुकैकी तथा आच्छादक

(iii) एकैकी तथा आच्छादक नहीं

(iv) बहुकैकी तथा आच्छादक नहीं

2. सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) मान ज्ञात कीजिए : $\int x^2 \sin(x^3)\, dx$. **1**

(ख) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} - a\hat{k}$ और $\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो a का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+e^x}{y}$. **1**

(घ) यदि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1} x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, तो $(A + B)$ तथा $(A - B)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

3. सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $y = A\cos\theta + B\sin\theta$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{d\theta^2} = -y$. **2**

(ख) असमिका $3x + 4y \leq 12$, $4x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ को ग्राफीय विधि से हल कीजिए। **2**

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$.

2

(घ) यदि A तथा B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह कोटि n के हैं तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. **2**

4. सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) वक्र $x = a\sin^3 t, y = b\cos^3 t$ का $t = \frac{\pi}{2}$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) एक पासे को दो बार उछाला जाता है। यदि उनके सतहों पर आये अंकों का योगफल 6 है, तो आये हुए अंकों में से कम से कम एक 4 होने की सशर्त प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) रेखा $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ को हल कीजिए। **2**

5. सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (a-b)\ 2$ से विभाजित हो$\}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है। **5**

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. **5**

(ग) $y = (\cos x)^{\tan x} + x^x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{यदि } x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$ $x = 3$ पर संतत है तो a तथा b का मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) फलन $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ के लिए अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन (i) वर्धमान तथा (ii) ह्रासमान हो। **5**

6. सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ को हल कीजिए। **5**

(ख) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) एक पासे को तीन बार फेंका जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब प्राप्त अंकों में से एक अंक विषम संख्या हो। **5**

(घ) वृत्त $x^2+y^2=8x$, परवलय $y^2=4x$ तथा x-अक्ष के ऊपरी भाग के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) मान ज्ञात कीजिए : $\int \left[\log(\log x)+\frac{1}{(\log x)^2}\right] dx.$ **5**

7. किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ समीकरण $A^2-4A+I_2=0$ को संतुष्ट करता है जहाँ I_2 एक 2×2 तत्समक आव्यूह तथा 0 एक 2×2 शून्य आव्यूह हैं। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए :
$3x-2y+3z=8,\ x+y-z=1$ और $4x-3y+2z=4.$ **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) $Z=8000x+12000y$ का निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :
$9x+12y\le 180,\ 3x+4y\le 60,\ x+3y\le 30,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$ **4**

(ii) मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\, dx.$ **4**

(b) मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x\, dx.$ **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि $y=\sin^{-1}x$, तो सिद्ध कीजिए $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0.$ **4**

(ii) वक्र $y=\cos(x+y),\ -2\pi\le x\le 2\pi$ का रेखा $x+2y=0$ के समान्तर स्पर्श रेखा का समीकरण लिखिए। **4**

(ख) (i) एक समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ तथा $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ के प्रतिच्छेद तथा बिन्दु $(1,1,1)$ से गुजरता है। **5**

(ii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ को हल कीजिए। **3**

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

(a) If $y = 4t$ and $x = \frac{4}{t}$, then the value of $\frac{dy}{dx}$ will be : **1**

(i) $-t^2$

(ii) $-\frac{1}{t^2}$

(iii) $-\frac{1}{t}$

(iv) t^3

(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, then BA will be : **1**

(i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) The slope of the normal to the curve $y = 2x^2 + 3\sin x$ at $x = 0$ will be : **1**

(i) $\frac{1}{3}$

(ii) 3

(iii) $-\frac{1}{3}$

(iv) -3

(d) The value of $\int_1^3 \frac{dx}{1+x^2}$ will be : **1**

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{12}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

(iv) $\frac{2\pi}{3}$

(e) The modulus function $f : R \to R^+$ given by $f(x) = |x|$ will be : **1**

(i) one-one and onto

(ii) many-one and onto

(iii) one-one and into

(iv) many-one and into

2. Do all the parts of the following :

(a) Evaluate : $\int x^2 \sin(x^3)\, dx$. **1**

(b) If the vectors $2\hat{i} + \hat{j} - a\hat{k}$ and $\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ are perpendicular, then find the value of a. **1**

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+e^x}{y}$. **1**

(d) If $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1} x$, find the value of x. **1**

(e) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, then find the value of $(A + B)$ and $(A - B)$. **1**

3. Do all the parts of the following :

(a) If $y = A\cos\theta + B\sin\theta$, then prove that $\frac{d^2y}{d\theta^2} = -y$. **2**

(b) Solve the inequality $3x + 4y \leq 12$, $4x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by graphical method. **2**

(c) Prove that $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$. **2**

(d) If A and B are two non-singular square matrices of order n, then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) Find the equation of tangent at $t = \frac{\pi}{2}$ on the curve $x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$. **2**

(b) One die is thrown two times. If the sum of the appeared numbers on their faces is 6, find the conditional probability of appearing number 4 at least one time in that. **2**

(c) Find the vector equation of the line $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$. **2**

(d) Solve the differential equation $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$. **2**

5. Do all the parts of the following :

(a) Prove that the relation $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (a-b) \text{ is divisible by } 2\}$ is an equivalence relation. **5**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. **5**

(c) Differentiate $y = (\cos x)^{\tan x} + x^x$. **5**

(d) If the function $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{if } x \leq 3 \\ bx+3, & \text{if } x > 3 \end{cases}$ is continuous at $x = 3$, then find the values of a and b. **5**

(e) Find the interval in which the function $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ is (i) increasing and (ii) decreasing. **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) Solve the differential equation $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$. **5**

(b) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k})$. **5**

(c) If a die is thrown three times, then find the probability of getting at least one appearing number in them will be odd. **5**

(d) Find the area including between the circle $x^2 + y^2 = 8x$, parabola $y^2 = 4x$ and upper part of x-axis. **5**

(e) Evaluate : $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$. **5**

7. Do any one part of the following :

(a) Prove that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A^2 - 4A + I_2 = 0$, where I_2 is 2×2 identity matrix and 0 is 2×2 zero matrix. Find A^{-1} with the help of this. **8**

(b) Solve the system of equations by matrix method :
$3x - 2y + 3z = 8$, $x + y - z = 1$ and $4x - 3y + 2z = 4$. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) (i) Maximize $Z = 8000x + 12000y$ under the following constraints :
$9x + 12y \leq 180$, $3x + 4y \leq 60$, $x + 3y \leq 30$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **4**

(ii) Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$. **4**

(b) Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x \, dx$. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) (i) If $y = \sin^{-1} x$, then prove that $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$. **4**

(ii) Find the equation of tangent of the curve $y = \cos(x+y)$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ which is parallel to the line $x + 2y = 0$. **4**

(b) (i) Find the vector equation of a plane which passes through the point of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ and the point $(1, 1, 1)$. **5**

(ii) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$. **3**