अनुक्रमांक : ____________ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : ____________

131 **324(AZ)**

2023
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में सम्बन्ध $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध होगा : **1**

(i) स्वतुल्य और सममित नहीं, किन्तु संक्रामक

(ii) स्वतुल्य और संक्रामक नहीं, किन्तु सममित

(iii) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न ही संक्रामक

(iv) सममित और संक्रामक नहीं, किन्तु स्वतुल्य

(ख) $f(x) = x^2 + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ होगा : **1**

(i) एकैक और आच्छादक

(ii) बहु-एक और आच्छादक

(iii) एकैक, किन्तु आच्छादक नहीं

(iv) न तो एकैक और न ही आच्छादक

(ग) यदि A वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर होगा : **1**

(i) A

(ii) $I - A$

(iii) I

(iv) $3A$

(घ) सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप होगा : **1**

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sqrt{2}$

(iii) 1

(iv) 0

(ङ) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 7y = \sin x$ की कोटि होगी : **1**

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\cos(\sec^{-1} x)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) आव्यूह AB ज्ञात कीजिए, यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **1**

(ग) जाँच कीजिए कि क्या $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R; x = 0$ पर संतत है। **1**

(घ) $\int \sec x(\sec x + \tan x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) यदि A और B ऐसी दो घटनायें हैं कि $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ और $P(A \cap B) = 0.15$, तो $P(A|B)$ ज्ञात कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $y = e^{a\cos^{-1} x}, -1 \leq x \leq 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$ **2**

(ख) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) बिन्दु $(2, 5, -3)$ की समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए। **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) उस समतल का सदिश एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 0, -2)$ से गुजरता है और जिस पर सदिश $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ लम्बवत हो। **2**

(ख) स्वेच्छ अचरों a और b को विलुप्त करके वक्रों के कुल $y^2 = a(b^2 - x^2)$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) यदि $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$ और $y = a\sin t$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I.$ **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$
5

(ख) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) :$ संख्या $5, (a - b)$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।
5

(ग) वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है। **5**

(घ) $\int \sqrt{x^2 - 8x + 7}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई ताशों की गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापित किये निकाले गये। पहले दो पत्तों के बादशाह और तीसरे के इक्का होने की क्या प्रायिकता है ? **5**

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सममित और विषम-सममित आव्यूहों को परिभाषित कीजिए। यदि A तथा B सममित आव्यूह हों, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB - BA)$ एक विषम-सममित आव्यूह है। **5**

(ख) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f वर्धमान या ह्रासमान है। **5**

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = 2x \tan^{-1} x - \log(1+x^2) + c.$ **5**

(घ) बिन्दु $(-2, 3)$ से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है। **5**

(ङ) एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि (i) समस्या हल हो जाती है, (ii) उनमें से कोई एक ही समस्या हल कर पाता है। **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत शंकु का महत्तम आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है। **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) समीकरण निकाय $2x - 3y + 5z = 11, 3x + 2y - 4z = -5, x + y - 2z = -3$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। **8**

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$ **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) व्यवरोधों $4x + y \geq 80, x + 5y \geq 115, 3x + 2y \leq 150, x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 6x + 3y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए। **8**

(ख) यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए। **8**

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

(a) In the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, the relation R defined by $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ will be : **1**

(i) not reflexive and symmetric, but transitive

(ii) not reflexive and transitive, but symmetric

(iii) not reflexive, not symmetric and not transitive

(iv) not symmetric and transitive, but reflexive

(b) The function $f : R \to R$ defined by $f(x) = x^2 + 5$ will be : **1**

(i) one-one and onto

(ii) many-one and onto

(iii) one-one, but not onto

(iv) neither one-one nor onto

(c) If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then $(I + A)^3 - 7A$ will be : **1**

(i) A

(ii) $I - A$

(iii) I

(iv) $3A$

(d) On the vector $\hat{i} + \hat{j}$ the projection of vector $\hat{i} - \hat{j}$ will be : **1**

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sqrt{2}$

(iii) 1

(iv) 0

(e) The order of the differential equation $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 7y = \sin x$ will be : **1**

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. Do all the parts of the following :

(a) Find the value of $\cos(\sec^{-1} x)$. **1**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, then find the matrix AB. **1**

(c) Test whether the function $f : R \rightarrow R$ defined by $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{if } x \neq \\ 1, & \text{if } x = \end{cases}$ is continuous at $x = 0$. **1**

(d) Evaluate : $\int \sec x(\sec x + \tan x)dx$. **1**

(e) If A and B are two events such that $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ and $P(A \cap B) = 0.15$, find $P(A|B)$. **1**

3. Do all the parts of the following :

(a) If $y = e^{a\cos^{-1}x}$, $-1 \leq x \leq 1$, then prove that $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$. **2**

(b) Evaluate : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$. **2**

(c) Find the value of $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$. **2**

(d) Find the distance of the point $(2, 5, -3)$ from the plane $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) Find the vector and Cartesian equation of the plane which passes through the point $(1, 0, -2)$ and on which the vector $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ is perpendicular. **2**

(b) Eliminating arbitrary constants a and b, find the differential equation represented by the family of curves $y^2 = a(b^2 - x^2)$. **2**

(c) If $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$ and $y = a\sin t$, find the value of $\frac{dy}{dx}$. **2**

(d) If $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, verify that $A'A = I$. **2**

5. Do all the parts of the following :

(a) Prove that $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$. **5**

(b) Prove that in the set Z of integers the relation R given by $R = \{(a, b) : \text{the number } 5 \text{ divides } (a-b)\}$ is an equivalence relation. **5**

(c) Find the point on the curve $y = x^3 - 11x + 5$ at which the tangent is $y = x - 11$. **5**

(d) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 - 8x + 7}\,dx$. **5**

(e) From a well shuffled pack of 52 cards three cards were drawn one after another without any replacement. What is the probability that the first two cards be king and the third be ace ? **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) Define symmetric and skew-symmetric matrices. If A and B are symmetric matrices, prove that $(AB - BA)$ is a skew-symmetric matrix. **5**

(b) Find the intervals in which the function f given by $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is increasing or decreasing. **5**

(c) Prove that $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = 2x \tan^{-1} x - \log(1 + x^2) + c.$ **5**

(d) Find the equation of the curve passing through the point $(-2, 3)$ on which the gradient of the tangent at any point (x, y) is $\frac{2x}{y^2}$. **5**

(e) The probabilities of solving a particular problem by A and B independently are respectively $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$. If both try to solve the problem independently, find the probability that (i) the problem is solved, (ii) only one of them solves the problem. **5**

7. Do any one part of the following :

(a) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$. **8**

(b) Prove that cone of the maximum volume inscribed in a sphere of radius R, is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) Solve by matrix method the system of equations :
$2x - 3y + 5z = 11$, $3x + 2y - 4z = -5$, $x + y - 2z = -3$. **8**

(b) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) Minimize $Z = 6x + 3y$ under the constraints :
$4x + y \geq 80$, $x + 5y \geq 115$, $3x + 2y \leq 150$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **8**

(b) If the area bounded by the curve $x = y^2$ and the line $x = 4$ is divided into two equal parts by the line $x = a$, find the value of a. **8**