

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8
10034

अनुक्रमांक : _____
नाम : _____

131

324(JC)

2025
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :

- (i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- (vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions:

- (i) There are in all nine questions in this question paper.
- (ii) All questions are compulsory.
- (iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- (iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

- (v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) मान लीजिए $A = \{2, 3, 4, 5\}$ तथा सभी $(a, b) \in A \times A$, एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a - b = 2\}$ से परिभाषित हैं। तब एक समुच्चय $B \subset A \times A$ ऐसा है कि : 1

- (i) $B = \phi$
- (ii) $B \neq \phi$
- (iii) $B = \{2, 3\}$
- (iv) $B = \{2, 4, 5\}$

(ख) यदि फलन $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x - 1 \forall x > 2$ द्वारा परिभाषित है और $f(1) = f(2) = 1$, तब f है : 1

- (i) एकैकी तथा आच्छादक
- (ii) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं
- (iii) बहुएक परन्तु आच्छादक नहीं
- (iv) न तो एकैकी न ही आच्छादक

(ग) यदि $\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} f(x) - \frac{x^2}{4} + c$ है तब $f(x)$ है : 1

- (i) $(\log x)^{-1}$
- (ii) $(2 \log x)^{-1}$
- (iii) $3 \log x$
- (iv) $\log x$

(घ) यदि $y = 5x^2 + 4$, तब बिन्दु $(2, 1)$ पर ढाल है : 1

- (i) $3/2\sqrt{14}$
- (ii) $1/2\sqrt{14}$

(iii) 20

(iv) 1

(ड) सदिश फलन $\vec{f}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + 5\hat{k}$ के बिन्दु $t = 1$ पर प्रवणता है : **1**

(i) $\hat{i} + 2\hat{j}$

(ii) $\hat{i} + 3\hat{j}$

(iii) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

(iv) $\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

1. Attempt all the parts of the following:

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book:

(a) Suppose that $A = \{2, 3, 4, 5\}$ and all $(a, b) \in A \times A$, are defined by a relation $R = \{(a, b) : a - b = 2\}$. Then there exists a set $B \subset A \times A$ such that : **1**

(i) $B = \phi$

(ii) $B \neq \phi$

(iii) $B = \{2, 3\}$

(iv) $B = \{2, 4, 5\}$

(b) If the function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is defined by $f(x) = x - 1 \forall x > 2$ and $f(1) = f(2) = 1$, then f is : **1**

(i) one-one and onto

(ii) onto but not one-one

(iii) many one but not onto

(iv) neither one-one nor onto

(c) If $\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} f(x) - \frac{x^2}{4} + c$, then $f(x)$ is : **1**

(i) $(\log x)^{-1}$

(ii) $(2 \log x)^{-1}$

(iii) $3 \log x$

(iv) $\log x$

(d) If $y = 5x^2 + 4$, then at the point $(2, 1)$, the slope is : 1

(i) $3/2\sqrt{14}$

(ii) $1/2\sqrt{14}$

(iii) 20

(iv) 1

(e) The vector function is given by $\vec{f}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + 5\hat{k}$, then at point $t = 1$ the slope is : 1

(i) $\hat{i} + 2\hat{j}$

(ii) $\hat{i} + 3\hat{j}$

(iii) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

(iv) $\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1 - x^2}$. 1

(ख) Z -अक्ष की दिक्-कोज्या ज्ञात कीजिए। 1

(ग) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 1

(घ) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) सिद्ध कीजिए कि $0 \leq P(E) \leq 1$, जहाँ घटना E के होने की प्रायिकता $P(E)$ है। 1

2. Do all the parts of the following :

(a) Prove that $\sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1 - x^2}$. 1

(b) Find the direction cosine of Z -axis. 1

- (c) Obtain the projection of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ on the vector $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$. 1
- (d) Find the value of $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$. 1
- (e) Prove that $0 \leq P(E) \leq 1$ where $P(E)$ is the probability of the event E . 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- (क) यदि क्रमित युग्म $(2x - 3, -5)$ और $(x, y - 1)$ बराबर हों, तो संख्याएँ x और y को ज्ञात कीजिए। 2
- (ख) वक्र समूह $y = \frac{2ce^{2x}}{1+ce^{2x}}$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 2
- (ग) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ और 4 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$, तब सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 2

- (घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 \end{bmatrix}$, तब सिद्ध कीजिए कि $(A')' \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2

3. Do all the parts of the following :

- (a) If the ordered pairs $(2x - 3, -5)$ and $(x, y - 1)$ are equal, then find the numbers x and y . 2
- (b) Obtain the differential equation of the family of curves $y = \frac{2ce^{2x}}{1+ce^{2x}}$. 2
- (c) The modulus of two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are $\sqrt{3}$ and 4 respectively, and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Then find the angle between the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$. 2

- (d) If the matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 \end{bmatrix}$, then prove that $(A')' \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- (क) एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ द्वारा निर्धारित हैं। **2**
- (ख) स्टील की $3 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ की आयताकार चादर के प्रत्येक कोने से $x \text{ m}$ लम्बाई के वर्गों को काटकर ढक्कन रहित संदूक बनाई जाती है। इस प्रकार बने संदूक का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए। **2**
- (ग) किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया है। हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने की तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.80 तथा 0.32 हैं। निर्माण कार्य समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **2**
- (घ) एक त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिन्दु $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ तथा $C(2, 3, 1)$ हैं। **2**

4. Do all the parts of the following :

- (a) Find the area of a parallelogram whose adjacent sides are the vectors $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$. **2**
- (b) A box is formed by $3 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ rectangular steel-sheet on cutting the squares of length $x \text{ m}$ from its each corner to form the box without cover. Then find the maximum volume of the box so formed. **2**
- (c) A person has a contract of construction. The probability of being a strike is 0.65. The probabilities of completing the construction work on time in both conditions are 0.80 and 0.32 whether the strike is not happened and it is happened respectively. Then find the probability of completing the construction work in due time. **2**
- (d) Find the area of a triangle ABC whose vertices are $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ and $C(2, 3, 1)$. **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- (क) यदि फलन $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ तथा फलन $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$ द्वारा परिभाषित है, तब सिद्ध कीजिए कि f तथा g एकैकी हैं, परंतु $f + g$ एकैकी नहीं है। 5
- (ख) निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत $z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण आलेखीय विधि से कीजिए :
 $x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5
- (ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए। 5
- (घ) फलन $x^{\cos x}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए। 5
- (ङ) वक्रों के समूह $y = a \sin(x+b)$, जिसमें a, b स्वेच्छ अचर हैं, को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

5. Do all parts of the following :

- (a) If the function $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ is given by $f(x) = \sin x$ and function $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ is given by $g(x) = \cos x$, then prove that f and g are one-one but $f + g$ is not one-one. 5
- (b) Minimize $z = 3x + 2y$ by graphical method under the following constraints :
 $x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5
- (c) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then show that $A^2 - 5A + 7I = 0$. Using this obtain A^{-1} . 5
- (d) Differentiate the function $x^{\cos x}$ with respect to x . 5
- (e) Find the differential equation of the family of curves denoted by $y = a \sin(x + b)$, where a, b are arbitrary constants. 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- (क) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) एक कार समय $t = 0$ पर बिन्दु P से चलना प्रारम्भ करके बिन्दु Q पर रुक जाती है। कार द्वारा t सेकण्ड में तय की गई दूरी x मीटर $x = t^2(2 - \frac{t}{3})$ द्वारा प्रदत्त है। कार को Q तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात कीजिए और P तथा Q के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) वक्र $y = x^2$ व रेखा $y = 16$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) यदि $y = \sin^{-1} x$ है तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$. **5**

(ङ) यदि E_1 तथा E_2 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो सिद्ध करें कि $P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2)$. **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$. **5**

(b) A car is started from a point P at time $t = 0$ and is stopped at the point Q . The distance x metre covered by the car in t second is given by $x = t^2(2 - \frac{t}{3})$. Find the time required by the car to reach at point Q and also find the distance between P and Q . **5**

(c) Find the area enclosed by the curve $y = x^2$ and the line $y = 16$. **5**

(d) If $y = \sin^{-1} x$, then prove that $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$. **5**

(e) If E_1, E_2 are mutually exclusive events, then prove that $P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2)$. **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, तब A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$x + y + 2z = 1$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$2x + y + 3z = 2.$$

8

7. Do any one part of the following :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} . **8**

(b) Solve the following system of equations by matrix method :

$$x + y + 2z = 1$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$2x + y + 3z = 2.$$

8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$. **8**

(ख) हल कीजिए : $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$. **8**

(b) Solve : $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$. **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध करें कि $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = 2$. **8**

(ख) सिद्ध करें कि $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{12}$. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) Prove that $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = 2$. **8**

(b) Prove that $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{12}$. **8**