अनुक्रमांक : ______________ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : ______________

131 **324 (EY)**

2024
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) यदि A एक वर्ग आव्यूह है और $A^2 = A$ है, तो $(A+I)^3 - 7A$ होगा : **1**

(i) A

(ii) $3A$

(iii) I

(iv) $I - A$

(ख) $\int \cos^2 x \, dx$ का मान होगा : **1**

(i) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + c$

(ii) $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$

(iv) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(ग) $-\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} - \hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान होगा : **1**

(i) 1

(ii) 0

(iii) -1

(iv) 2

(घ) अवकल समीकरण $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7y = 0$ की घात होगी : **1**

(i) 2

(ii) 3

(iii) 6

(iv) 5

(ङ) यदि $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, तो A से B तक फलन होगा : **1**

(i) $\{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$

(ii) $\{(a, 3), (a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$

(iii) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$

(iv) $\{(a, 2), (b, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ लम्बवत् हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) यदि $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ और $P(A \cap B) = 0.18$ तो $P(B|A)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{x-2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) यदि $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। **1**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{a, b, c\}$ तथा $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ है, तो B से A तक फलनों की संख्या तथा इनके बीच एकैकी आच्छादी (bijective) फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) यदि $y = A\cos t + B\sin t$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ है। **2**

(ग) यदि इकाई सदिशों $\hat{a}$ और $\hat{b}$ के बीच का कोण θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$. **2**

(घ) बिन्दु $A(3, -2, -5)$ से गुज़रने वाली तथा सदिश $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के समान्तर रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ वर्धमान है। **2**

(ख) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में दो तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी A में एक तुल्यता संबंध है। **2**

(घ) यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ सदिश हैं और $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ है, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 6 है तथा उनके घनों का योगफल न्यूनतम है। **5**

(ग) सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

5

(घ) आलेखीय विधि द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों $x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 20$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $z = 3x + 8y$ का न्यूनतम तथा अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) यदि $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन की $x = 2$ पर सांतत्य तथा अवकलनीयता की जाँच कीजिए। **5**

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y$ को हल कीजिए। **5**

(ख) एक विद्यालय में 500 विद्यार्थी हैं जिनमें से 230 लड़के हैं। यह ज्ञात है कि 20% लड़के कक्षा XII में पढ़ते हैं। एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी लड़का है और कक्षा XII में पढ़ता है, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \cdot \text{adj}\, A = |A| \cdot I.$ **5**

(घ) सिद्ध कीजिए कि $N \times N$ पर संबंध R जहाँ $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ तुल्यता संबंध है। **5**

(ङ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$-x+3y-2z=3$

$3x+2y+3z=5$

$-2x+y+z=-4.$ **8**

(ख) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) सिद्ध कीजिए : $\int_0^{\pi/4} \log_e(1+\tan x)\, dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2$ **8**

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ को हल कीजिए। **8**

(ख) (i) यदि $\cos y = x\cos(a+y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

(ii) यदि $y=(\sin x)^{\tan x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **8**

Instructions:

(i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

(ii) There are in all nine questions in this question paper.

(iii) All questions are compulsory.

(iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(v) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do all the parts :

Select the correct alternative of each part and write it in your answer book.

(a) If A is a square matrix and $A^2 = A$, then $(A+I)^3 - 7A$ will be : **1**

(i) A

(ii) $3A$

(iii) I

(iv) $I - A$

(b) The value of $\int \cos^2 x \, dx$ will be : **1**

(i) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + c$

(ii) $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$

(iv) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(c) The value of $-\hat{i}\cdot\hat{i} + \hat{j}\cdot\hat{j} - \hat{k}\cdot\hat{k}$ will be : **1**

(i) 1

(ii) 0

(iii) -1

(iv) 2

(d) The degree of the differential equation $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7y = 0$ will be : **1**

(i) 2

(ii) 3

(iii) 6

(iv) 5

(e) If $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, then the function from A to B will be : **1**

(i) $\{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$

(ii) $\{(a, 3), (a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$

(iii) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$

(iv) $\{(a, 2), (b, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

2. Do all the parts :

(a) Find the value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$. **1**

(b) If the vectors $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular, then find the value of λ. **1**

(c) If $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ and $P(A \cap B) = 0.18$, then find the value of $P(B|A)$. **1**

(d) Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{x-2}$. **1**

(e) If $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ and $x - y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, then find the value of x and y. **1**

3. Do all the parts :

(a) If $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, then find the number of functions and number of bijective functions from B to A. **2**

(b) If $y = A\cos t + B\sin t$, then prove that $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. **2**

(c) If the angle between the unit vectors $\hat{a}$ and $\hat{b}$ is θ, then prove that $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$. **2**

(d) Find the cartesian equation of the line passing through the point $A(3, -2, -5)$ and parallel to the vector $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$. **2**

4. Do all the parts :

(a) Find the interval in which the function $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ is increasing. **2**

(b) Find the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$. **2**

(c) If R_1 and R_2 be two equivalence relations in a set A, then prove that $R_1 \cap R_2$ is also an equivalence relation in A. **2**

(d) If $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vectors and $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$. **2**

5. Do all the parts :

(a) Find the area of the part inscribed by the curve $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **5**

(b) Find two numbers such that their sum is 6 and the sum of their cubes is minimum. **5**

(c) Prove that :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

5

(d) Find the minimum and maximum value of L.P.P. $z = 3x + 8y$ by graphical method under the following constraints :
$x + 3y \leq 60,\ x + y \geq 20,\ x \leq y,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$ **5**

(e) If $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ is defined, then check its continuity and differentiability at $x = 2$. **5**

6. Do all the parts :

(a) Solve the differential equation $(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y$. **5**

(b) There are 500 students in a school in which 230 are boys. It is known that 20% boys are studying in class XII. Find the probability that a randomly chosen student is a boy and is of class XII. **5**

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj } A = |A| \cdot I$. **5**

(d) Prove that a relation R on $N \times N$ is defined as $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ is an equivalence relation. **5**

(e) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k})$. **5**

7. Do any one part :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method :
$-x + 3y - 2z = 3$
$3x + 2y + 3z = 5$
$-2x + y + z = -4.$ **8**

(b) Find A^{-1}, if the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **8**

8. Do any one part :

(a) (i) Find the value of $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}}\, dx$.

(ii) Prove : $\int_0^{\pi/4} \log_e(1+\tan x)\, dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2$ **8**

(b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$. **8**

9. Do any one part :

(a) Solve the differential equation $(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$. **8**

(b) (i) If $\cos y = x\cos(a+y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

(ii) If $y = (\sin x)^{\tan x}$, then find $\frac{dy}{dx}$. **8**