अनुक्रमांक : ____________ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8
नाम : ____________

131 **324(FD)**

2024
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a = b - 2, b \geq 6\}$ समुच्चय N में परिभाषित है, तो सही उत्तर होगा : **1**

(i) $(2, 4) \in R$

(ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(6, 8) \in R$

(iv) $(8, 7) \in R$

(ख) फलन $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान है : **1**

(i) $\frac{\pi}{2}$

(ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $\frac{2\pi}{3}$

(ग) सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ का मान होगा : **1**

(i) 16

(ii) 18

(iii) 15

(iv) 13

(घ) फलन $\sin(x^2+5)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा : **1**

(i) $2\cos(x^2+5)$

(ii) $2\sin(x^2+5)$

(iii) $\cos(x^2+5)$

(iv) इनमें से कोई नहीं

(ङ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$ तो α का मान होगा : **1**

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) π

(iv) $\frac{3\pi}{2}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) वक्र $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ का बिन्दु $(2, -1)$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) फलन $\sin mx$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। **1**

(ग) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तथा $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ दिया है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) $\int x^2 e^{x^3} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $y \log y \, dx - x \, dy = 0$ को हल कीजिए। **2**

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $x = 0$ पर संतत है। **2**

(घ) यदि $y = x^3 + \tan x$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} \, dx$ को हल कीजिए। **2**

(ख) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{6}{10}$ हों, तो $P(A \cup B)$ तथा $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ हैं। **2**

(घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : (a - b)$ 5 का गुणज है$\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है। **5**

(ख) यदि आव्यूह $X+Y=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}$ तथा आव्यूह $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ हैं, तो आव्यूहों X तथा Y को ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) यदि $y=(\cot x)^{\sin x}+x^{x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है और वर्गों का योग न्यूनतम हो। **5**

(ङ) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) वृत्त $x^2+y^2=a^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ और $\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ हैं, तो रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) $Z=4x+y$ का अधिकतम मान आलेख विधि द्वारा निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए :

$x+y\leq 50$

$3x+y\leq 90$

$x\geq 0,\ y\geq 0.$ **5**

(घ) एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\ (x\neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) आव्यूह विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरणों के निकाय को हल कीजिए :

$3x-2y+3z=8$

$x+y-z=1$

$4x-3y+2z=4.$ **8**

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों।

(ii) दिखाइए कि बिन्दु $(2, 1, 1)$, $(1, -3, 5)$ तथा $(3, -4, -4)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। **8**

(ख) दो रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण निम्नवत् हैं :

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$. **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) समाकल $\int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **8**

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. Do all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

(a) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 2, b \geq 6\}$ is defined on the set N, then the correct answer will be : **1**

(i) $(2, 4) \in R$

(ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(6, 8) \in R$

(iv) $(8, 7) \in R$

(b) The principal value of the function $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ will be : **1**

(i) $\frac{\pi}{2}$

(ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $\frac{2\pi}{3}$

(c) The value of the determinant $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ will be : **1**

(i) 16

(ii) 18

(iii) 15

(iv) 13

(d) The differential coefficient of the function $\sin(x^2+5)$ w.r.t. x will be : **1**

(i) $2\cos(x^2+5)$

(ii) $2\sin(x^2+5)$

(iii) $\cos(x^2+5)$

(iv) none of these

(e) If matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then the value of α will be : **1**

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) π

(iv) $\frac{3\pi}{2}$

2. Do all the parts of the following :

(a) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ of the curve $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ at the point $(2, -1)$. **1**

(b) Differentiate the function $\sin mx$ with respect to x. **1**

(c) The angle between two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is θ and $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ is given. Find the value of θ. **1**

(d) Find the order of the differential equation $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + y = 0$. **1**

(e) Find the value of $\int x^2 e^{x^3}\,dx$. **1**

3. Do all the parts of the following :

(a) Solve the differential equation $y \log y \, dx - x \, dy = 0$. **2**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, then find AB and BA. **2**

(c) Prove that the function $f(x) = x^2$ is continuous at $x = 0$. **2**

(d) If $y = x^3 + \tan x$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) Solve : $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} \, dx$. **2**

(b) If A and B are independent events, where $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{6}{10}$, then find $P(A \cup B)$ and $P(A \cap B)$. **2**

(c) Find the area of a parallelogram whose adjacent sides are $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. **2**

(d) There are two children in a family. If it is known that at least one child is boy in two of them, then find the probability that both the children are boy. **2**

5. Do all the parts of the following :

(a) Prove that a relation $R = \{(a, b) : (a - b)$ is a multiple of $5\}$ is an equivalence relation in the set of integers Z. **5**

(b) If the matrices $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ and $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, then find the matrices X and Y. **5**

(c) If $y = (\cot x)^{\sin x} + x^x$, then find $\frac{dy}{dx}$. **5**

(d) Find such two positive numbers whose sum is 15 and sum of their squares is minimum. **5**

(e) Find the value of $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} \, dx$. **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ surrounded by it. **5**

(b) If the position vectors of the points A, B, C and D are successively $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$, then find the angle between the lines AB and CD. **5**

(c) Find the maximum value of $Z = 4x + y$ under the following constraints by graphical method :
$x + y \leq 50$
$3x + y \leq 90$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$ **5**

(d) A die is thrown two times. It is found that the sum of appeared numbers is 6. Find the conditional probability that the number 4 appeared at least one time. **5**

(e) Find the general solution of the differential equation $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2\ (x \neq 0)$. **5**

7. Do any one part of the following :

(a) Solve the following system of equations by using matrix method :
$3x - 2y + 3z = 8$
$x + y - z = 1$
$4x - 3y + 2z = 4.$ **8**

(b) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) (i) Find the value of p such that the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are mutually perpendicular.
(ii) Show that the points $(2, 1, 1)$, $(1, -3, 5)$ and $(3, -4, -4)$ are the vertices of a right-angled triangle. **8**

(b) Find the shortest distance between two lines l_1 and l_2 whose vector equations are $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) Find the value of the integral $\int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}\, dx$. **8**

(b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$. **8**