

अनुक्रमांक : _____

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : _____

131

324(FC)

2024
गणित

(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) $\sin^{-1}(e^{-x})$ का अवकल गुणांक होगा :

1

(i) $\cos^{-1}(e^{-x})$

(ii) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(iv) $-\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(ख) $\int x \sin x \, dx$ का मान होगा :

1

- (i) $-x \cos x + \sin x + c$
- (ii) $x \cos x - \sin x + c$
- (iii) $x \sin x - \cos x + c$
- (iv) $-x \cos x - \sin x + c$

(ग) मापांक फलन $f : R \rightarrow R^+$ को $f(x) = |x|$ द्वारा दिया गया है, तब यह होगा : 1

- (i) एकैकी
- (ii) बहु-एकैकी
- (iii) अनाच्छादक
- (iv) इनमें से कोई नहीं

(घ) यदि $\begin{bmatrix} 2x - y & x + 2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो x तथा y का मान होगा : 1

- (i) $x = 1, y = 1$
- (ii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$
- (iii) $x = 2, y = 1$
- (iv) $x = 1, y = \frac{1}{2}$

(ङ) सदिशों $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के बीच का कोण होगा : 1

- (i) 60°
- (ii) 30°
- (iii) 90°
- (iv) $\cos^{-1} \left(\frac{1}{14} \right)$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिक्-कोज्याएँ (direction cosines) ज्ञात कीजिए। 1

(ख) यदि $\sin \left(\frac{1}{2} \right) = \tan^{-1} x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ग) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ तथा $P(A/B) = \frac{2}{5}$, तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। 1

(घ) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{1-y}$. 1

(ङ) वक्र $y = 2x^2 - 3 \cos x$ की $x = 0$ पर प्रवणता ज्ञात कीजिए। 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $x^y = e^{x-y}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1+\log_e x)^2}$. 2

(ख) अवकल समीकरण $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$ को हल कीजिए। 2

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$, जहाँ ω इकाई का घनमूल है। 2

(घ) यदि $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ है तथा A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो (i) $P(A \cap B)$ तथा (ii) $P(A \cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) वक्र $ay^2 = x^3$ की बिन्दु (am^2, am^3) पर प्रवणता ज्ञात कीजिए। 2

(ख) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 1)$ तथा $C(5, 8, 7)$ संरेख हैं। 2

(ग) $\int \sqrt{5+2x+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) यदि $y = x^x$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 9y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y, x \geq 0, y \geq 0.$$

5

(ख) रेखाओं $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ग) दिखाइए कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) : (a-b) 5 \text{ का गुणज है}\}$ एक समुच्चय Z (पूर्णाकों का समुच्चय) पर एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

(घ) यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x$ ($x \neq 0$) का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$. 5

(ख) मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx$. 5

(ग) वृत्त $x^2 + y^2 - 2x = 8$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(घ) एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं तथा दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। इनमें से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो लाल है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह लाल गेंद पहले थैले से निकाली गयी है। 5

(ङ) यदि किसी $\triangle ABC$ के शीर्ष A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|$ होगा। 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$. 8

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 5 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

(ख) निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) अवकलन कीजिए : $y = (\tan x)^{\cot x} + (\sin x)^{\cos x}$.

8

(ख) फलन $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें वह (i) वर्द्धमान, (ii) हासमान हो।

8

Instructions:

- (i) First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all nine questions in this question paper.
- (iii) All questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt all the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write it in your answer-book :

(a) Differential coefficient of $\sin^{-1}(e^{-x})$ will be : **1**

- (i) $\cos^{-1}(e^{-x})$
- (ii) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
- (iii) $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$
- (iv) $-\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(b) The value of $\int x \sin x \, dx$ will be : **1**

- (i) $-x \cos x + \sin x + c$
- (ii) $x \cos x - \sin x + c$
- (iii) $x \sin x - \cos x + c$
- (iv) $-x \cos x - \sin x + c$

(c) The modulus function $f : R \rightarrow R^+$ is given by $f(x) = |x|$; then it will be : **1**

- (i) one-one
- (ii) many-one
- (iii) not onto
- (iv) none of these

(d) If $\begin{bmatrix} 2x - y & x + 2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then the values of x and y will be : **1**

- (i) $x = 1, y = 1$
- (ii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$
- (iii) $x = 2, y = 1$
- (iv) $x = 1, y = \frac{1}{2}$

(e) The angle between the vectors $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ will be : **1**

- (i) 60°
- (ii) 30°
- (iii) 90°
- (iv) $\cos^{-1} \left(\frac{1}{14} \right)$

2. Do all the parts of the following :

- (a) Find the direction cosines of the vector $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. **1**
- (b) If $\sin \left(\frac{1}{2} \right) = \tan^{-1} x$, then find the value of x . **1**
- (c) If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A/B) = \frac{2}{5}$, then find $P(A \cap B)$. **1**
- (d) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{1-y}$. **1**
- (e) Find the slope of the curve $y = 2x^2 - 3 \cos x$ at $x = 0$. **1**

3. Do all the parts of the following :

- (a) If $x^y = e^{x-y}$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1+\log_e x)^2}$. **2**

- (b) Solve the differential equation $\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$. **2**

- (c) Prove that $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$, where ω is cube root of unity. **2**

- (d) If $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ and A and B are independent events, then find the values of (i) $P(A \cap B)$ and (ii) $P(A \cup B)$. **2**

4. Do all the parts of the following :

- (a) Find the slope of the curve $ay^2 = x^3$ at the point (am^2, am^3) . **2**
- (b) Show that the points $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 1)$ and $C(5, 8, 7)$ are collinear. **2**
- (c) Find the value of $\int \sqrt{5 + 2x + x^2} \, dx$. **2**
- (d) If $y = x^x$, then find $\frac{dy}{dx}$. **2**

5. Do all the parts of the following :

- (a) Minimize $Z = 3x + 9y$ under the following constraints :
 $x + 3y \leq 60$
 $x + y \geq 10$
 $x \leq y, x \geq 0, y \geq 0$. **5**
- (b) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$. **5**
- (c) Show that a relation $R = \{(a, b) : (a - b) \text{ is a multiple of } 5\}$ on the set Z (set of integers) is an equivalence relation. **5**
- (d) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ for $-1 < x < 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. **5**

- (e) Prove that $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. **5**

6. Do all the parts of the following :

- (a) Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x$ ($x \neq 0$), when $y = 0$ if $x = \frac{\pi}{2}$. **5**
- (b) Find the value of $\int \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx$. **5**
- (c) Find the area bounded by the circle $x^2 + y^2 - 2x = 8$. **5**
- (d) There are 4 red and 4 black balls in a bag and another bag contains 2 red and 6 black balls. One bag is randomly selected and a red ball is drawn. Find the probability that the red ball is drawn from the first bag. **5**
- (e) If the position vectors of the vertices A, B, C of a triangle ABC are $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ respectively, then prove that the area of $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|$. **5**

7. Do any one part of the following :

- (a) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$. **8**
- (b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$. **8**

8. Do any one part of the following :

- (a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 5 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, then find the value of $(AB)^{-1}$. **8**
- (b) Solve the system of linear equations by matrix method :
 $3x - 2y + 3z = 8$
 $x + y - z = 1$
 $4x - 3y + 2z = 4$. **8**

9. Do any one part of the following :

- (a) Differentiate : $y = (\tan x)^{\cot x} + (\sin x)^{\cos x}$. **8**
- (b) Find the interval in which the function $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$ is (i) increasing, (ii) decreasing. **8**