अनुक्रमांक : _____ नाम : _____

131 **324(IC)**

2025
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note: First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :

i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions:

i) There are in all nine questions in this question paper.

ii) All questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) फलन $f : R \to R, f(x) = x^3, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है तो **1**

(i) f एकैकी तथा आच्छादक है

(ii) f बहुएक तथा आच्छादक है

(iii) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं

(iv) f बहुएक है परन्तु आच्छादक नहीं

(ख) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y = 0$ की कोटि है **1**

(i) 1

(ii) 4

(iii) 3

(iv) 2

(ग) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ सेमी है। r के सापेक्ष वृत्त के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है **1**

(i) 10π

(ii) 12π

(iii) 8π

(iv) 6π

(घ) यदि सदिश $\lambda\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ और $4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं तो λ का मान है **1**

(i) 4

(ii) 20

(iii) 3

(iv) 1

(ङ) माना समुच्चय $N =$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय में $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R है। तो **1**

(i) $(2, 4) \in R$

(ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(6, 8) \in R$

(iv) $(8, 7) \in R$

1. Do all the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book :

(a) A function $f : R \to R$ is defined by $f(x) = x^3, \forall x \in R$ then **1**

(i) f is one-one and onto

(ii) f is many-one and onto

(iii) f is one-one but not onto

(iv) f is many-one but not onto

(b) The order of the differential equation $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y = 0$ is **1**

(i) 1

(ii) 4

(iii) 3

(iv) 2

(c) Radius of a circle is $r = 6$ cm. Rate of change in area of circle with respect to radius r is **1**

(i) 10π

(ii) 12π

(iii) 8π

(iv) 6π

(d) If vectors $\lambda\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ and $4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ are perpendicular to each other then the value of λ is **1**

(i) 4

(ii) 20

(iii) 3

(iv) 1

(e) A relation R in set N = set of natural numbers is defined as $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$, then **1**

(i) $(2, 4) \in R$

(ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(6, 8) \in R$

(iv) $(8, 7) \in R$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है तो gof ज्ञात कीजिए। **1**

(ख) $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) एक रेखा x, y तथा z अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः $90°$, $60°$ तथा $30°$ का कोण बनाती है तो रेखा की दिक् कोज्या ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) $x = 3$ पर $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए। **1**

(ङ) एक थैले में 5 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। निकाली गयी गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **1**

2. Do all the parts of the following :

(a) If functions $f : R \to R$ and $g : R \to R$ are defined by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$ respectively, evaluate gof. **1**

(b) Find the value of $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$. **1**

(c) A line makes $90°$, $60°$ and $30°$ angles with x, y and z axes respectively in positive direction. Find the direction cosine of the line. **1**

(d) Check continuity of $f(x) = 2x^2 - 1$ at $x = 3$. **1**

(e) There are 5 red and 3 black balls in a bag. One ball is randomly drawn. Find the probability that the drawn ball is black. **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सारणिक $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) सिद्ध कीजिए कि किसी कालेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। **2**

(ग) दिखाइये कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्बवत हैं। **2**

(घ) यदि $y = x^{x \cos x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **2**

3. Do all the parts of the following :

(a) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$. **2**

(b) If R is a relation in the set A of all books in the library of any college defined by $R = \{(x, y) :$ No. of pages in x and y are equal$\}$, prove that R is an equivalence relation. **2**

(c) Prove that the lines $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ and $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ are perpendicular to each other. **2**

(d) If $y = x^{x \cos x}$ then evaluate $\frac{dy}{dx}$. **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) समाकलन $\int(\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$ ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) यदि $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं। **2**

(घ) सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) Find the angle between the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. **2**

(b) Find the integral $\int(\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$. **2**

(c) If $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ and $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ then prove that A and B are independent events. **2**

(d) Prove that $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$. **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} 5 - \tan^{-1} 3 + \tan^{-1} \frac{7}{9} = \frac{\pi}{4}$ **5**

(ख) अवकल समीकरण $(1 + x^2)dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx$ को हल कीजिए। **5**

(ग) एक थैले में 10 सफेद एवं 15 लाल गेंदें हैं तथा दूसरे थैले में 16 सफेद एवं 9 लाल गेंदें हैं। प्रत्येक थैले से एक गेंद निकाली जाती है। दोनों गेंदों के एक ही रंग की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) यदि $x^y = e^{x-y}$ हो तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ **5**

(ङ) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ तथा $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **5**

5. Do all parts of the following :

(a) Prove that $\tan^{-1} 5 - \tan^{-1} 3 + \tan^{-1} \frac{7}{9} = \frac{\pi}{4}$. **5**

(b) Solve the differential equation $(1 + x^2)dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx$. **5**

(c) There are 10 white and 15 red balls in a bag and 16 white and 9 red balls in another bag. One ball is taken out from each bag. What is the probability that both balls taken out are of same colour ? **5**

(d) If $x^y = e^{x-y}$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$. **5**

(e) Find unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **5**

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ का मान निकालिए। **5**

(ग) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 3y$ का अधिकतमीकरण आलेखीय विधि से कीजिए :
$3x + 5y \leq 15, \quad 5x + 2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$ **5**

(घ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \mu(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) समाकलन $\int \frac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ को ज्ञात कीजिए। **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) Find the area of region bounded by parabola $y^2 = 4ax$ and a straight line $y = 2ax$. **5**

(b) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$. **5**

(c) Maximize $z = 5x + 3y$ under the following constraints graphically :
$3x + 5y \leq 15, \quad 5x + 2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$ **5**

(d) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}+\mu(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})$. **5**

(e) Evaluate the integral $\int \frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **5**