

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16
नाम : _____

131
324 (FF)

2022
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि L किसी समतल में स्थित समस्त सरल रेखाओं का एक समुच्चय है तथा संबंध $R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ पर लम्ब है}\}$ समुच्चय L में परिभाषित है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए : **1**

- (i) R स्वतुल्य है
- (ii) R सममित है
- (iii) R संक्रामक है
- (iv) इनमें से कोई नहीं

(ख) यदि आव्यूह A और B के क्रम (कोटि) क्रमशः $m \times n$ और $n \times p$ हैं, तो AB का क्रम है : **1**

- (i) $p \times m$
- (ii) $n \times m$
- (iii) $m \times p$
- (iv) इनमें से कोई नहीं

(ग) अवकल समीकरण $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 2$ की घात है : **1**

- (i) 0
- (ii) 1
- (iii) 2
- (iv) 3

(घ) व्यंजक $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान है : **1**

- (i) 0
- (ii) 1
- (iii) 2
- (iv) 3

(ङ) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान होगा : **1**

- (i) 0
- (ii) $\frac{\pi}{2}$
- (iii) $\frac{\pi}{4}$
- (iv) $\frac{\pi}{8}$

(च) यदि $\triangle ABC$ के शीर्ष $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ और $C(2, 3, 1)$ हों, तो $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है : **1**

- (i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
- (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$
- (iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$
- (iv) इनमें से कोई नहीं

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $f : R \rightarrow R, f(x) = x^2 \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन है
: 1

- (i) एकैकी आच्छादक
- (ii) बहु-एक आच्छादक
- (iii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं
- (iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) यदि $f : R \rightarrow R$ जहाँ $f(x) = \cos x$ और $g : R \rightarrow R$ जहाँ $g(x) = x^2$,
तो सिद्ध कीजिए कि $f \circ g \neq g \circ f$. 1

(ग) $\cot^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ का मुख्य मान होगा : 1

- (i) $\frac{\pi}{3}$
- (ii) $\frac{\pi}{6}$
- (iii) $\frac{2\pi}{3}$
- (iv) इनमें से कोई नहीं

(घ) दिखाइए कि फलन $f(x) = |x|, x = 0$ पर संतत है। 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $y - x \frac{dy}{dx} = a \left(y^2 + \frac{dy}{dx} \right)$ को हल कीजिए। 2

(ख) यदि $f : A \rightarrow B$ तथा $g : B \rightarrow C$ एकैकी हैं, तो सिद्ध कीजिए कि
 $g \circ f : A \rightarrow C$ भी एकैकी होगा। 2

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ तो AB तथा BA का मान
ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $\triangle ABC$ के शीर्ष $A(2, -6)$, $B(5, 4)$, $C(k, 4)$ और उसका क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो सिद्ध कीजिए कि k का मान 12, -2 होगा। 2

(ख) यदि $\tan^{-1} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{\pi}{4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि दिए हुए सम्पूर्ण पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब-वृत्तीय शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण $\sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$ होता है। 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ख) समाकल $\int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ज्ञात कीजिए। 5

(ग) हल कीजिए : $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$. 5

(घ) दर्शाइए कि : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$. 5

(ङ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए। 5

(च) सिद्ध कीजिए कि : $\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x$, जहाँ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि : $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$. 5

(ख) यदि एक समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड क्रमशः a, b, c हैं और इसकी मूल-बिन्दु से दूरी p है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$.
5

(ग) यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x + y + z = xyz$.
5

(घ) अवकल समीकरण $[x \sin^2(\frac{y}{x}) - y] dx + x dy = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$ यदि $x = 1$ को हल कीजिए।
5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$.
5

(च) $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B) = \frac{2}{5}$ है।
5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$.
4

(ii) वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर हैं।
4

(ख) (i) फलन $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है तो क्या $f, x = 0, x = 1$ तथा $x = 2$ पर संतत है ?
4

(ii) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, तो $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$.
4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$
8

(ख) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) दिए गए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

$A \cdot (\text{adj } A) = |A|I$ और इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम लम्ब-वृत्तीय शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है। 8

(English Version)

Instructions:

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all nine questions in this question paper.
- (iii) All questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt all parts of the following:

- (a) If L is a set of all straight lines in any plane and relation $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ is perpendicular to } L_2\}$ is defined in L . Select the correct answer from the following: **1**
 - (i) R is reflexive
 - (ii) R is symmetric
 - (iii) R is transitive
 - (iv) None of these
- (b) If the order of matrices A and B are respectively $m \times n$ and $n \times p$ then the order of AB is: **1**
 - (i) $p \times m$
 - (ii) $n \times m$
 - (iii) $m \times p$
 - (iv) None of these

(c) The degree of the differential equation $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 2$ is: **1**

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 3

(d) The value of the expression $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ is: **1**

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 3

(e) The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ will be: **1**

(i) 0

(ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $\frac{\pi}{8}$

(f) The area of $\triangle ABC$, whose vertices are $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ and $C(2, 3, 1)$ in square units is: **1**

(i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

(ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$

(iv) None of these

2. Attempt all parts of the following:

(a) The function $f : R \rightarrow R, f(x) = x^2 \forall x \in R$ is defined, then f is: **1**

- (i) one-one onto
- (ii) many-one onto
- (iii) one-one, but not onto
- (iv) neither one-one nor onto

(b) If $f : R \rightarrow R$ where $f(x) = \cos x$ and $g : R \rightarrow R$ where $g(x) = x^2$ then prove that $f \circ g \neq g \circ f$. **1**

(c) The principal value of $\cot^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ will be: **1**

- (i) $\frac{\pi}{3}$
- (ii) $\frac{\pi}{6}$
- (iii) $\frac{2\pi}{3}$
- (iv) None of these

(d) Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. **1**

3. Attempt all parts of the following:

(a) Solve $y - x \frac{dy}{dx} = a \left(y^2 + \frac{dy}{dx} \right)$. **2**

(b) If $f : A \rightarrow B$ and $g : B \rightarrow C$ are one-one, then prove that $g \circ f : A \rightarrow C$ is also one-one. **2**

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ then find AB and BA . **2**

(d) Prove that $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. **2**

4. Attempt all parts of the following:

(a) If vertices of $\triangle ABC$ are $A(2, -6)$, $B(5, 4)$ and $C(k, 4)$ and if the area of $\triangle ABC$ be 35 square units, then prove that the value of k will be 12, -2. **2**

(b) If $\tan^{-1} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{\pi}{4}$ then find the value of x . **2**

(c) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$. **2**

(d) Show that the semi-vertical angle of right circular cone of given total surface and maximum volume is $\sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$. **2**

5. Attempt any five parts of the following:

(a) Find the area between region of two circles $x^2 + y^2 = 4$ and $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. **5**

(b) Find the integral $\int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+1)}$. **5**

(c) Solve: $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$. **5**

(d) Show that: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$. **5**

(e) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. **5**

(f) Prove that: $\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x$, where $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. **5**

6. Attempt any five parts of the following:

(a) Prove that: $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$. **5**

(b) If a, b, c are the intercepts on coordinate axes respectively by a plane and its distance from the origin is p , then prove that $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$. **5**

(c) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, then prove that $x + y + z = xyz$. **5**

(d) Solve the differential equation $[x \sin^2(\frac{y}{x}) - y] dx + x dy = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$ if $x = 1$. **5**

(e) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$. **5**

(f) Find $P(A \cup B)$, if $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A|B) = \frac{2}{5}$. **5**

7. Attempt any one part of the following:

(a) (i) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, then prove that $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$. **4**

(ii) Find the equations of the normals, to the curve $y = x^3 + 2x + 6$ which are parallel to the line $x + 14y + 4 = 0$. **4**

(b) (i) Is the function f defined by $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ continuous at $x = 0$, $x = 1$ and $x = 2$? **4**

(ii) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, then $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$. **4**

8. Attempt any one part of the following:

(a) By using elementary transformation, find the inverse of the following matrix: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **8**

(b) Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. **8**

9. Attempt any one part of the following:

(a) Verify: $A \cdot (\text{adj } A) = |A|I$ for the given matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ and find its inverse. **8**

- (b) Prove that the volume of the largest right circular cone that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere.

8