मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक : ______________ नाम : ______________

131 **324 (FI)**

2022
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

(ii) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :
प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए। **1 $\times$ 5 = 5**

(क) मान लीजिए कि $f : R \to R, f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए : **1**

(i) f एकैकी आच्छादक है

(ii) f बहु-एकैकी आच्छादक है

(iii) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है

(iv) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

(ख) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मुख्य मान बराबर है : **1**

(i) $\frac{7\pi}{6}$

(ii) $\frac{5\pi}{6}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

(iv) $\frac{\pi}{6}$

(ग) वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है : **1**

(i) 3

(ii) $\frac{1}{3}$

(iii) -3

(iv) $-\frac{1}{3}$

(घ) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है : **1**

(i) 2

(ii) 1

(iii) 0

(iv) परिभाषित नहीं है

(ङ) निश्चित समाकलन $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ के सही उत्तर का चयन कीजिए : **1**

(i) $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\frac{2\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{6}$

(iv) $\frac{\pi}{12}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$ पर संतत है। **1**

(ख) $\int \csc x(\csc x + \cot x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तो AB का मान ज्ञात कीजिए। **1**

(घ) यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ और $P(E \cap F) = 0.2$, तो $P(E/F)$ ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। **2**

(ग) स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए वक्र $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$ के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) फलन $(\log x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) ग्राफीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :
$Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि व्यवरोध निम्न हैं :
$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0.$ **2**

(ख) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय में $R = \{(a, b) : 2, (a-b)$ को विभाजित करत द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है। **2**

(ग) यदि शीर्ष $(2, 6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लंबवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **2**

(ङ) उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(5, 2, -4)$ से जाता है और $2, 3, -1$ दिक्-अनुपात वाली रेखा पर लम्ब है। **5**

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) दर्शाइए कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{11} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$. **5**

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. **5**

(ग) फलन x^x का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं। दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। इनमें से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो लाल है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह पहले थैले से निकाली गयी है। **5**

(ङ) यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है, तो दिखाइये कि $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$. **5**

(च) वक्र $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ (i) x-अक्ष के समान्तर हों (ii) y-अक्ष के समान्तर हों। **5**

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निश्चित समाकलन की सहायता से ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1+y^2)\, dx$ का हल ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) एक व्यक्ति A, 70% घटनाओं में सत्य बोलता है। दूसरा व्यक्ति B, 60% घटनाओं में सत्य बोलता है। एक घटना में दोनों के एक दूसरे से सहमत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :
निम्न व्यवरोधों $x - y \geq 0$, $-x + 2y \geq 2$, $x \geq 3$, $y \leq 4$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 2x + 3y - 1$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 6$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) - 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन और बिन्दु $(2, 2, 1)$ से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) निम्नलिखित समीकरण निकाय $2x + y + z = 1, x - 2y - 3z = 1$ तथा $3x + 2y + 4z = 5$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। **8**

(ख) रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :
$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$. **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$ **8**

(ख) अवकल समीकरण $(1+e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\, dy = 0$ को हल कीजिए। **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) $\int_a^b x^2\, dx$ का योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल की सहायता से मान ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) (i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**
(ii) वक्र $x = at^2, y = 2at$ के बिन्दु 't' पर अभिलम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। **3**

(English Version)

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt all parts of the following :

Select the correct option of each part and write it on your answer-book.
1 × 5 = 5

(a) Suppose that a function $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 3x$. Select correct option : **1**

(i) f is one-one onto

(ii) f is many-one onto

(iii) f is one-one but not onto

(iv) f is neither one-one nor onto

(b) The principal value of $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ is : **1**

(i) $\frac{7\pi}{6}$

(ii) $\frac{5\pi}{6}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

(iv) $\frac{\pi}{6}$

(c) The gradient of the normal to the curve $y = 2x^2 + 3\sin x$ at $x = 0$ is : **1**

(i) 3

(ii) $\frac{1}{3}$

(iii) -3

(iv) $-\frac{1}{3}$

(d) Order of the differential equation $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ is : **1**

(i) 2

(ii) 1

(iii) 0

(iv) not defined

(e) Choose the correct answer of the definite integral $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$: **1**

(i) $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\frac{2\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{6}$

(iv) $\frac{\pi}{12}$

2. Attempt all the parts of the following :

(a) Check that the function $f(x) = 5x - 3$ is continuous at $x = 0$. **1**

(b) Find the value of $\int \csc x(\csc x + \cot x)\, dx$. **1**

(c) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, then find the value of AB. **1**

(d) If E and F are such type of events that $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ and $P(E \cap F) = 0.2$, then find $P(E/F)$. **1**

(e) Find the value of $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. **1**

3. Attempt all parts of the following :

(a) Find the value of $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$. **2**

(b) Show that the points $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$, $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$, $C(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$ are vertices of a right angle triangle. **2**

(c) Removing the arbitrary constants a and b, find the differential equation representing the family of curve $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$. **2**

(d) Differentiate the function $(\log x)^{\cos x}$ with respect to x. **2**

4. Attempt all parts of the following :

(a) By graphical method solve the following linear programming problem. Find the maximum value of $Z = 3x+4y$, under the following constraints :
$x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **2**

(b) Prove that in the set of integers, the given relation $R = \{(a, b) :$ 2 divides $(a - b)\}$ is an equivalence relation. **2**

(c) If area of a triangle with vertex $(2, 6)$, $(5, 4)$ and $(k, 4)$ is 35 square units, then find the value of k. **2**

(d) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a}+\vec{b})$ and $(\vec{a}-\vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$. **2**

(e) Find the vector and Cartesian equation of that plane which passes through the point $(5, 2, -4)$ and perpendicular to the line whose direction ratios are $2, 3, -1$. **5**

5. Attempt any five parts of the following :

(a) Show that $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{11} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$. **5**

(b) Prove that $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. **5**

(c) Find the minimum value of the function x^x. **5**

(d) In a bag there are 4 red and 4 black balls. In another bag there are 2 red and 6 black balls. One bag is selected at random and one ball

drawn which is red. Find the probability that it is drawn from the first bag. **5**

(e) If $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$, then show that $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$. **5**

(f) Find the points on the curve $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ where the tangents are (i) parallel to x-axis, (ii) parallel to y-axis. **5**

6. Attempt any five parts of the following :

(a) Find the area enclosed between the parabola $y^2 = 4ax$ and straight line $y = 2ax$ with the help of definite integral. **5**

(b) Find the solution of the differential equation $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$. **5**

(c) A man A speaks truth in 70% events. Another man B speaks truth in 60% events. Find the probability that in an event both agree with one other. **5**

(d) Solve the following linear programming problem under the following constraints :
$x - y \geq 0$, $-x + 2y \geq 2$, $x \geq 3$, $y \leq 4$, $y \geq 0$. Find the minimum value of $Z = 2x + 3y - 1$. **5**

(e) Find the vector equation of a plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0$ and point $(2, 2, 1)$. **5**

7. Attempt any one part of the following :

(a) Solve the following system of equations $2x + y + z = 1$, $x - 2y - 3z = 1$ and $3x + 2y + 4z = 5$ by matrix method. **8**

(b) Find the shortest distance between the lines, whose vector equations are given by $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$. **8**

8. Attempt any one part of the following :

(a) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$ **8**

(b) Solve the differential equation $(1+e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\, dy = 0.$ **8**

9. Attempt any one part of the following :

(a) Find the value of $\int_a^b x^2\, dx$ with the help of definite integral as the limit of a sum. **8**

(b) (i) Find the value of $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\, dx.$ **5**

(ii) Find the equation of the normal at point 't' of the curve $x = at^2$, $y = 2at.$ **3**