अनुक्रमांक : _____ मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम : _____

131 **324(AX)**

2023
गणित
(Mathematics)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

(क) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{5}}$ का घात (degree) होगा : **1**

(i) 2

(ii) 5

(iii) 1

(iv) $\frac{1}{5}$

(ख) $\int \cos^2 x \, dx$ का मान होगा : **1**

(i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(ii) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\sin 2x + c$

(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$

(iv) $2\cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$

(ग) सदिशों $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण होगा : **1**

(i) $90°$

(ii) $60°$

(iii) $30°$

(iv) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

(घ) यदि दो परिमित समुच्चयों A तथा B में अवयव क्रमशः m तथा n हों, तो A से B में कुल सम्बन्धों की संख्या होगी : **1**

(i) 2^{m+n}

(ii) 2^{mn}

(iii) $m \times n$

(iv) $m + n$

(ङ) यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, तो निम्न में से A से B में फलन होगा : **1**

(i) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

(ii) $\{(1, 3), (2, 4)\}$

(iii) $\{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$

(iv) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & \text{यदि } x \leq 2 \\ x^2 + 1, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$ $x = 2$ पर संतत फलन है। **1**

(ख) वक्रों के परिवार $y = a\sin(x + b)$ जिसमें a और b स्वेच्छ अचर हैं, का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। **1**

(ग) सिद्ध कीजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा परिभाषित फलन $f : N \to N$ आच्छादक तो है परन्तु एकैकी नहीं है। **1**

(घ) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ तथा $P(A/B) = \frac{2}{5}$, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए। **1**

(ङ) असमिका $8x + 4 < 7x + 8$ को हल कीजिए। **1**

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) बिन्दुओं $(2, -5, 1)$ तथा $(1, 4, 6)$ को मिलाने वाली रेखा पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो उस रेखा को $2 : 3$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। **2**

(ख) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी दो भुजाओं को $\vec{a}$ और $\vec{b}$ से प्रदर्शित किया गया है। **2**

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$. **2**

(घ) पूर्णांकों 1 से 11 तक में से दो पूर्णांक यादृच्छया चुने जाते हैं। यदि उनका योग सम है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पूर्णांक विषम हैं। **2**

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $f : R \to R$ जहाँ $f(x) = \sin x$ और $g : R \to R$ जहाँ $g(x) = x^2$, तो $f(x)$ तथा $g(x)$ का परिसर ज्ञात कीजिए। **2**

(ख) यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं। **2**

(ग) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ पर लम्ब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) अवकल समीकरण $(x-y)\,dy-(x+y)\,dx=0$ को हल कीजिए। **2**

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)$. **5**

(ख) यदि $f(x)=x+\frac{1}{x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $[f(x)]^3=f(x^3)+3f\left(\frac{1}{x}\right)$. **5**

(ग) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) बिन्दुओं $-2\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$, $-3\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k}$ और $-5\hat{i}-6\hat{j}-6\hat{k}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) वक्र $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ के बिन्दु $(1,1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। **5**

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि दो पासे एक साथ फेंके जा रहे हैं, तो कम से कम एक 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **5**

(ख) $\int \frac{\sec^2 2x\,dx}{(\cot x-\tan x)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ग) अगर एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक $(1,5,1)$, $(0,4,-2)$ और $(2,3,4)$ हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। **5**

(घ) $\int_a^b x^2\,dx$ की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन की सहायता से मान ज्ञात कीजिए। **5**

(ङ) रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ तथा $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) समीकरण निकाय $3x-2y+3z=8$, $x+y-z=1$ और $4x-3y+2z=4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। **8**

(ख) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ को हल कीजिए। **8**

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **4**

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **4**

(ख) यदि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का अभिलम्ब x-अक्ष से कोण θ बनाए, तो सिद्ध कीजिए कि अभिलम्ब का समीकरण $y \cos\theta - x \sin\theta = a \cos 2\theta$ है। **8**

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 10$, $x \leq y$, $x \geq 0$ और $y \geq 0$.

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। **8**

(ख) प्रारंभिक रूपान्तरणों के द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। **8**

Instructions:

(i) There are in all nine questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. Attempt all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

(a) The degree of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{5}}$ will be : **1**

(i) 2

(ii) 5

(iii) 1

(iv) $\frac{1}{5}$

(b) The value of $\int \cos^2 x \, dx$ will be : **1**

(i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(ii) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\sin 2x + c$

(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$

(iv) $2\cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$

(c) The angle between the vectors $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ will be : **1**

(i) $90°$

(ii) $60°$

(iii) 30°

(iv) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

(d) If the numbers of elements of two finite sets A and B are m and n respectively, then total number of relations from A to B will be : **1**

(i) 2^{m+n}

(ii) 2^{mn}

(iii) $m \times n$

(iv) $m + n$

(e) If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, then the function from A to B will be : **1**

(i) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

(ii) $\{(1, 3), (2, 4)\}$

(iii) $\{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$

(iv) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$

2. Do all the parts of the following :

(a) Prove that the function $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & \text{if } x \leq 2 \\ x^2 + 1, & \text{if } x > 2 \end{cases}$ is continuous at $x = 2$. **1**

(b) Find the differential equation of the family of curves $y = a\sin(x + b)$, where a and b are arbitrary constants. **1**

(c) Prove that the function $f : N \to N$ defined by $f(x) = x - 1$ when $x > 2$ and $f(1) = f(2) = 1$ is onto but it is not one-one. **1**

(d) If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A/B) = \frac{2}{5}$, then find $P(A \cup B)$. **1**

(e) Solve the inequality $8x + 4 < 7x + 8$. **1**

3. Do all the parts of the following :

(a) Find the coordinates of the point which divides the line joining the points $(2, -5, 1)$ and $(1, 4, 6)$ internally in the ratio $2 : 3$. **2**

(b) Find the area of the triangle whose two sides are represented by $\vec{a}$ and $\vec{b}$ if $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$. **2**

(c) If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, prove that $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$. **2**

(d) Two integers among 1 to 11 are selected at random. If their sum is even, then find the probability that both integers are odd. **2**

4. Do all the parts of the following :

(a) If $f : R \to R$, where $f(x) = \sin x$ and $g : R \to R$, where $g(x) = x^2$, then find the range of $f(x)$ and $g(x)$. **2**

(b) If $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ and $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, prove that the events A and B are independent. **2**

(c) If $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ are such that $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ is perpendicular to $\vec{c}$, then find the value of λ. **2**

(d) Solve the differential equation $(x - y)\,dy - (x + y)\,dx = 0$. **2**

5. Do all parts of the following :

(a) Prove : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1\right)$. **5**

(b) If $f(x) = x + \frac{1}{x}$, prove that $[f(x)]^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$. **5**

(c) Find the differential coefficient of $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ with respect to $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. **5**

(d) Find the equation to the plane passing through the points $-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$, $-3\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$ and $-5\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k}$. **5**

(e) Find the equation of normal at the point $(1, 1)$ of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$. **5**

6. Do all the parts of the following :

(a) If two dice are thrown together, then find the probability of getting at least one 6. **5**

(b) Evaluate : $\int \frac{\sec^2 2x\, dx}{(\cot x - \tan x)^2}$. **5**

(c) If the coordinates of mid-points of the sides of a triangle are $(1, 5, 1)$, $(0, 4, -2)$ and $(2, 3, 4)$, then find the coordinates of its vertices. **5**

(d) Find the value of $\int_a^b x^2\, dx$ with the help of definite integral as the limit of a sum. **5**

(e) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$. **5**

7. Do any one part of the following :

(a) Solve the following system of equations by matrix method : $3x - 2y + 3z = 8$, $x + y - z = 1$ and $4x - 3y + 2z = 4$. **8**

(b) Solve the differential equation $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$. **8**

8. Do any one part of the following :

(a) (i) Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$. **4**

(ii) Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$. **4**

(b) If the normal of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ makes an angle θ with x-axis, prove that the equation of the normal is $y \cos\theta - x \sin\theta = a \cos 2\theta$. **8**

9. Do any one part of the following :

(a) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :
$x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 10$, $x \leq y$, $x \geq 0$ and $y \geq 0$.
Find the minimum and maximum values of $Z = 3x + 9y$. **8**

(b) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ by elementary transformations. **8**